

૪૧૬૫

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુનઃકળ વિવેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.
છટા ધારણના વિધાર્થિઓ સાર.
રચનાર.

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,
રાજકોટ વિક્ટોરિયા જ્યુમિલી તાલુકારક્ષત હેડમાસ્તર અને
કાઠિયાવાડ એજન્સિ વકીલ.
સસમેવ જયતે.



આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની દલેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને જનરલ
એજન્સિ કંપની “કિમિટેડના” પ્રેસમાં
રણુકોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.
સંવત ૧૯૪૫. સને ૧૮૮૯.

કીમત ચાર આના.

૪૧૬૫

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

પુષ્કળ વિચેચન, સમજ અને ઉપયોગી અનુમાનો સાથે.
છઠ્ઠા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ સાર.
રચનાર,

માણેકલાલ નાગરદાસ શાહ,
રાજકોટ વિક્ટોરિયા જ્યુબિલી તાલુકાસ્કૂલ હેડમાસ્ટર અને,
કાઠિયાવાડ એજન્સિ વર્કસી.
સસમેવ જયતે.



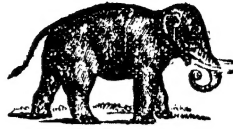
આવૃત્તિ પહેલી.

અમદાવાદ.

મામાની હવેલી મધ્યે યુનાઇટેડ પ્રિન્ટિંગ અને જનરલ
એજન્સિ કંપની “લિમિટેડના” પ્રેસમાં
રણછોડલાલ ગંગારામે છાપ્યાં.
સંવત ૧૯૪૫. સને ૧૯૮૯.

કીમત ચાર આના.

સને ૧૮૬૭ ના ૨૫ મા આક્ટ
પ્રમાણે રજીસ્ટર કરાવીછે.



અર્પણ પત્રિકા.

કદરદાન મુરખી શ્રી રાવખલાદુર ગોપાળજી સુરભાઈ દેશાઈ,
આસિસ્ટન્ટ એજ્યુકેશનલ ઈન્સ્પેક્ટર પ્રાંત કાઠિઆવાડ અને
ફેલો ઑફ ધી યુનિવર્સિટી.

કામ કરવાની આવડ અને ઉડી સમજ, તીવ્ર અને
શોધક યુદ્ધિ, તથા ખંતિલાપણા રાધે અખંડ ઉચ્ચ ઉદ્યોગ-
માંજ મગ્ન, એ આદિ આપના સર્વોત્તમ સદ્ગુણોવડે આ
કાઠિઆવાડમાંથી અજ્ઞાનરૂપી અધકાર નીકળી, આવો જ્ઞાનરૂપી
સૂર્ય પ્રકાશ્યો; તેનું ધાતું ખરું જ્ઞાન આપનેજ ધટે છે. માટે;
તેની સુખારક યાદગીરી ચિરંકાળ રહેવા સાર ફેળવણી ખા-
તાને ઉપયોગી એવું આ લઘુ પુસ્તક હું આપની રજા લઈ
અતિ નમ્રતાથી આપને અર્પણ કરીશ અથાગ હર્ષિત થાકીશું.

તા. ૧ લી જુલાઈ
૧૮૮૯.
રાજકોટ.

લી. ચર્ણુરજ સેવક,
ભાણેકલાલ નાગરદાશ શાહ.
વિક્ટોરિયા જ્યુબિલી તાલુકા સ્કૂલ હેડમાસ્ટર.
રાજકોટ.

પ્રસ્તાવના.

ગૂજરાતી નિશાળોના છટ્ટા ધોરણમાં હાલમાં સરકારે ભૂમિતિનો વિષય દાખલ કરેલો છે. આ વિષય પર ગૂજરાતી ભાષામાં જે એક પુસ્તકો છે પરંતુ નિશાળોમાં ચલાવવા યોગ્ય શુદ્ધ, સરળ અને યથાર્થ પુસ્તકની મને જરૂર જણાતાં જે ત્રણ અંગ્રેજી, ગૂજરાતી તથા મરેઠી પુસ્તકોને આધારે અને શીખવવામાં શું શું અગત્યનું છે અને કેવી કેવી અડચણો પડે છે એ વગેરે બાબત મારો પોતિકો અનુભવ બેળીને આ પુસ્તક તૈયાર કર્યું છે. મારા પરમ પ્રીતિયમિત્ર રાજ્યમાન રાજેશ્રી કેશવલાલ સખીદાસ સંઘાણી, આસિસ્ટન્ટ એન્જિનિયર માલેગામ જીલ્લે ખાનદેશ. એમણે, આ પુસ્તક અથથી ઇતિ સૂધી વાંચી યોગ્ય ફેરફાર કરવા ભલામણ કીધી છે મારે, આ પ્રસંગે તેમનો ઉપકાર માનું છું. અને હજી કોઈ સજ્જનને કાંઈ દોષ જણાય તો તેમણે જણાવવા મહેરબાની કરવી કે, ખીજી આવૃત્તિમાં સુધારો કરવાનું બને.

આ પુસ્તકમાં કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓ એકથી વધારે રીતે સિદ્ધ કરી બતાવી છે; પુષ્કળ વિવેચન અને સમગ્નુતિ આપી છે; ઉપરાંત વિદ્યાર્થીઓની બુદ્ધિ ખીલવવાને થોડાં એક ઉપયોગી અનુમાનો આપવાને આપણા, લોક પ્રીય અને ખતિલા આસિસ્ટન્ટ ઇન્સ્પેક્ટર શા. બા. ગોપાળભાઈએ સૂચના કરી તે મોટા ઉપકાર સાથે સ્વીકારી, તેવાં અનુમાનો જેને પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી સિદ્ધ થઈ શકે છે તે તે પ્રતિજ્ઞાઓ નીચે છેવટે આપ્યાં છે.

શિક્ષકોને સૂચના.

ભૂમિતિનો વિષય શીખવવાનું કામ બહુ કઠણ છે એવી કેટલાક શિક્ષકો જૂઓ પાડે છે; અલબત્ત આ વિષય કઠણ છે એમાં શક નથી; પરંતુ યોગ્ય પદ્ધતિસર અને ચતુરાઈથી શિક્ષક શીખવે તો, સરળતાથી શીખવી શકે છે.

પ્રથમ વ્યાખ્યાઓ સારી પેઠે સમજાવવી. દરેક વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે પાઠીઆ પર તેવા આકારો કાઢી બતાવવા અગર કાગળના આકારો કરી બતાવવા કે, લાકડાના આકારો હોય તો બતાવવા. અને બની શકે તેટલા પ્રત્યક્ષ દાખલા બતાવવા. જેમકે, પંદરમી વ્યાખ્યા શીખવતી વખતે ગાડીના પૈડાનો દાખલો લેવો. તેમાં મધ્ય બિંદુ, પરિધ અને ત્રિજ્યાઓનો સંબંધ બતાવવો. આથી વિદ્યાર્થીઓને પાકું જ્ઞાન થશે. તેજ પ્રમાણે સ્વીકૃત પક્ષો અને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો સમજાવવાં.

આકૃતિઓ નિશાળીઆ લગભગ ખરી અને ઝડપથી કાઢી શકે એવો મહાવરો કરાવવો.

દરેક પ્રતિજ્ઞા શીખવતી વખતે પ્રથમ તેનો ઉપન્યાસ શું છે અને સિદ્ધ કરવાની બાબત શી છે એ બે બાબતો જૂદી પાડી વિદ્યાર્થીઓને પાકી સમજાવવી.

પ્રતિજ્ઞાઓ સિદ્ધ કરવામાં બાળુઓ અને ખૂણાઓનું સમાન પણું બતાવવાને અક્ષરોથી બોલી કે લખી બતાવવાની રીત છે. પણ શીખવતી વખતે નિશાળીઆઓ આગળ, મોઢે સિદ્ધ કરી બતાવવામાં શિક્ષકે સમાન પણું બતાવવાને એક સરખા આંકડા લેવાથી નિશાળીઆના લક્ષમાં બહુ તાળું યાદ રહેશે જેમકે, પહેલી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં અંક તથા અર્થ બાળુ બરાબર થઈ એ યાદ રહેવાને એ બંને બાળુ ઉપર એકડો * લખવો તેમજ અર્થ તથા અંક બાળુઓ બરાબર બતાવવાને તેમાં પણ એકડોજ મૂકવો. એટલે, એ ત્રણે બાળુઓ ચરખરસ બરાબર છે એ સ્મૃતિમાં તાળું રહેશે. આ પ્રમાણે આંકડાનો ઉપયોગ વિચાર કરી ઠેકાણે ઠેકાણે કરવો.

એપડીમાં લખ્યા છે તે શિવાય બીજા અક્ષરો લેધને અગર આંકડા લઈને કે, અક્ષરો કાઢી નાંખીને, નિશાળીઆઓ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરે એવી શિક્ષકે ટેવ પાડવી. જેમકે, તેના તેજ અક્ષરો હમેશાં રાખવાથી નિશાળીઆ ગોખાયું બની નયછે. પાકું સમજતા નથી અને પરીક્ષામાં નાપાસ થાયછે. માટે, આ બાબત શિક્ષકોએ અવશ્ય લક્ષમાં રાખવાની છે.

વળી, પ્રમેયસિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા સાર કાગળના કે લૂગડાના કડકાના તેવા આકારો બનાવી અગર લાકડાના આકારો હોય તો તેમાં ઉપન્યાસમાં હોયેલી અને સિદ્ધ કરવાની કે સિદ્ધ કરેલી બાબતો પ્રલક્ષ બતાવી શિક્ષકે ખાત્રી કરાવવી.

ચોટી એક પ્રતિજ્ઞાઓ એવી છે કે જેના ઉપન્યાસમાં † બધે બાબતો બીજકુત્ત સ્વતંત્ર આપેલી છે; તેમજ કેટલીક પ્રતિજ્ઞાઓમાં બધે ત્રણ ત્રણ બાબતો સિદ્ધ × કરવાની આવેછે; કે, જો, તેઓને જુદી પાડીને લખે તો, ખરેખર જુદી જુદી પ્રતિજ્ઞાઓ થાય. પણ તેમ કરવાથી બહુ લંબાણ થઈ નય માટે, એકજ પ્રતિજ્ઞાઓમાં સંબંધ રાખતી બાબતો મૂળ અંચકારે એકી ગોઠવી છે. એવી બાબતો પાકી સમજાય, અને શીખનાર તથા શીખ વનારને ગુંથવણ ન પડે માટે, આ પુસ્તકમાં નંબર પાડી એવી બાબતો એવી પ્રતિજ્ઞાઓમાં જુદી બતાવી છે. માટે શિક્ષકે એવા જૂદા જૂદા કડકા બરાબર સમજાવી તેમને એકઠા કરી છેવટે આખો સિદ્ધાંત જોડાવવો. અગર વખત મળે તો દરેક કડકો જુદે જુદે દહાડે શીખવવો, ભૂમિતિ શીખવવાનો વખત એકાંતરે રાખવો એ બસ છે.

આ વિષયમાં નવી શીખવવાની બાબત પાછળ શીખેલી બાબત ઉપર બહુ આધાર રાખેછે. માટે, દરેક બાબત પાકી થયા શિવાય આગળ નવી બાબત શરૂ કરવી નહિ. એટલે પેહલેથીજ પાકું શીખવો.

* અગડો અગર પાંચડો કે સાતડો ગમે તે સમાન આંકડો લખો.

† ૫, ૨૮, પ્રાતઃ જુઓ.

× ૪, ૨૧, ૨૬, ૨૯, ૩૨, ૩૩, ૩૪ પ્રતિજ્ઞા જુઓ.

શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ.	સ્થળ.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૨	૧૯ મી વ્યાખ્યાની આદૃતિમાં.	ઉપત્રા ભાગમાં કાંઈ લખ્યું નથી.	ખંડ.
૩	૨૪ મી „ „	ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપર આંકડો ભર્યો નથી.	૫
૪	૩૦ મી „ „	સમાંતર સમબાજુ ચો- બૂણાની એક બાજુ ઉ- પર આંકડો ભર્યો નથી.	૮
૫	ટિકામાં છેલ્લી લીટી.	ત ભૂ. કૃ. મ.	ત ભૂ. કૃ. પ્ર.
૧૨	૫મી પ્રતિજ્ઞાની ૭મી લીટી.	(૨મી. પ્ર.)	પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બાબત એકજ સિદ્ધ કરવી હોય તો, આ ઠેકાણે (૨- મી. પ્ર.) એમ જોઈએ પણ બીજી બાબત સિદ્ધ કરવી હોયતો જરૂર નથી. કેમકે, ઉપન્યાસમાંજ બા- બુઓ વધારવાનું આપેલું છે.
૨૫	૯ મી લીટી.	સાંધો.	વધારો.
૪૧	૩૫ મી પ્રતિજ્ઞાની ૧ લીટી.	અકજ.	એકજ
૪૨	૩૬ પ્રતિજ્ઞાની ૧ લીટી.	(ચર્ક તથા ફેર)	(ચક્ર તથા ફેર)

ભૂમિતિનાં મૂળતત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

ભૂમિતિ*=(ભૂ-પૃથ્વી+મા-માપવું+તિ-પણું) પૃથ્વી (જમીન) ની માપણીની વિદ્યા. પણ, હાલ તો આકારના ગુણોનું શાસ્ત્ર એ અર્થમાં વપરાય છે.

શીખવાના દ્વાયદા:-૧ તર્ક, તોલન અને સ્મરાણાદિ શક્તિઓ પ્રયત્ન થાય છે. ૨ જમીન અને પર્વતોની માપણી કરવામાં અને આકાશી પદાર્થોનાં અંતર જાણવામાં મદદ મળે છે. ૩ મનને આનંદ થાય છે.

વ્યાખ્યાઓ.

૧. બિંદુ તેજ, જેને સ્થિતિમાત્ર છે; પણ ભાગો નથી.

૨. લીટી તેજ, જેને માત્ર લંબાઈ છે; પણ પહોળાઈ નથી. બિંદુઓને સાંધવાથી લીટી થાય છે.

૩. લીટીના છેડાઓ બિંદુ હોય છે.

૪. સીધીલીટી તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય છે.

૫. સફાઈ તેજ, જેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ માત્ર હોય છે.

૬. સદ્ધાઈના છેડાઓ લીટીઓ હોય છે.

૭. સપાટ સફાઈ તેજ, જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય છે.

૮. સમતલ ખૂણો તેજ, જે એક સદ્ધાઈમાં એકઠી મળે છે, પણ એકજ દિશામાં નથી; એવી બે લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોંક (વલણ) છે.

૯. સમતલ સીધી લીટી ખૂણો તેજ, જેઓ એકઠી મળે છે પણ એકજ સીધી લીટીમાં નથી, એવી બે સીધી લીટીઓનો પરસ્પરનો ઝોંક છે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૧૦. (૧) કાટખૂણો જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર (એકે તરફ નમ્યા વગર) પડીને, પાસપાસેના ખૂણા બરાબર કરે છે. ત્યારે, આ ખૂણાઓમાં હેલા પ્રત્યેકને કાટખૂણો કહે છે. અને આ લીટીઓ માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એવું કહેવાય છે.

કાટખૂણો.

* આ વિદ્યાનો પ્રથમ ગ્રીસ દેશમાં શોધ થયો છે.

૧૧. (૨) પહોઠો લૂણો તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં મોટો હોયછે.

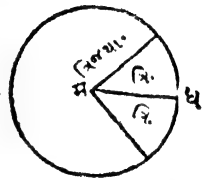
૧૨. (૩) સાંકડો લૂણો તેજ, જે કાટખૂણા કરતાં નાનો હોયછે.

૧૩. સીમા અથવા મર્યાદા તેજ, જે કોઈ વસ્તુનો છેડો.

૧૪. આકૃતિ તેજ, જે સફાઈની હદ સધળી તરફથી એક અથવા વધારે લીટીઓથી થયેલી છે.

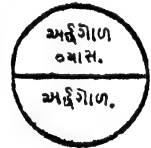
૧૫. ગોઠ તેજ સપાટઆકૃતિ કે, જેની હદ એક અખંડ લીટીથી રિ

થયેલી છે. અને તે અખંડ લીટીને તેનો ઘેર અથવા પરિધ કહેછે. ગોળમાં એવું એક મુકરર બિંદુ છે કે, પ જેમાંથી તેના પરિધ સુધી દોરેલી સધળી લીટીઓ અસ્પર્શ બરાબર છે.



૧૬. આ બિંદુ (જેમાંથી બરાબર લીટીઓ દોરીછે) ને ગોઠનું મધ્ય-બિંદુ કહેછે. મધ્યબિંદુથી પરિધ સુધી દોરેલી લીટીને ત્રિજ્યા કહેછે. (જુઓ ઉપલી આકૃતિ)

૧૭. ગોઠનો વ્યાસ તેજ સીધી લીટી, જે મધ્યબિંદુની પાર દોરેલી અને જેના છેડા બંને તરફ પરિધમાં હોયછે. (નિમ્નથી વ્યાસ બમણો છે.)



૧૮. મધ્યગોઠ તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ વ્યાસથી તથા વ્યાસથી કપાયેલા ગોળના ભાગથી થયેલી છે. (ઉપલી આકૃતિ જુઓ.)

૧૯. ગોઠનો લંબ તેજ આકૃતિ કે, જેની હદ એક સીધી લીટીથી તથા તેનાથી કપાયેલા પરિધના ભાગથી થયેલી છે.



૨૦. સીધીલીટીઆકૃતિ તેજ કે, જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી થયેલી હોયછે. (નીચે પ્રમાણે તેના ત્રણ પ્રકાર છે.)

૨૧. (૧) ત્રિકોણ તેજ સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ત્રણ બાજુઓથી થયેલી છે.

(૩)

૨૨. (૨) ચોત્તૂળાકૃતિ તેજ, જેની હદ ચાર બાજુઓથી થયેલી છે; ચોત્તૂળાકૃતિના સામસામેના—પાસપાસેના નહિ—ખૂણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓને તેની કર્ણલીટીઓ કહેછે.



૨૩. (૩) વઢત્તૂળ તેજ, સીધીલીટીઆકૃતિ કે, જેની હદ ચાર કરતાં વધારે બાજુઓથી થયેલી છે. ખૂણાની સંખ્યા પ્રમાણે તેને ત્ર્યંચખૂણ, પદ્મખૂણ, સપ્તખૂણ ઇત્યાદિ પણ કહેછે.

ત્રિકોણો.

૨૪. (૧) સમત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે.



૨૫. (૨) સમદ્વિત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજુઓ બરાબર છે.



૨૬. (૩) વિષમત્રાજુ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓ બરાબર નથી.



૨૭. (૪) કાટત્તૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણો છે. કાટખૂણાની સામેની બાજુને કર્ણ કહેછે.



૨૮. (૫) પહોઢત્તૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં એક પહોળો ખૂણો છે.



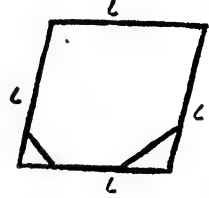
૨૯. (૬) સાંકડત્તૂળ ત્રિકોણ તેજ કે, જે ત્રિકોણમાં ત્રણે સાંકડા ખૂણો છે.



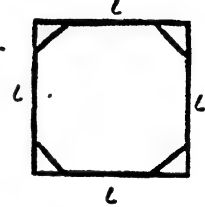
ચોખ્ખણ.

૨૯. (અ) સમાંતરવાજુચોખ્ખણ* તેજ, ચોખ્ખણકૃતિ કે, જેની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ સમાંતર છે. (તેના નીચે પ્રમાણે ચાર પ્રકાર છે.)

૩૦. (૧) સમાંતર સમવાજુ ચોખ્ખણ, જે ચોખ્ખણકૃતિની ચારે બાજુઓ બરાબર છે; પણ ખૂણા બરાબર નથી. તેને લૉક્ષેજ અથવા રૉમ્બસ પણ કહેછે.

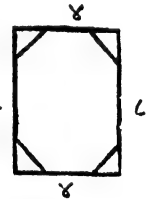


૩૧. (૨) ચોરસ, જે ચોખ્ખણની ચારે બાજુઓ બરાબર છે અને ચારે ખૂણા કાટખૂણા (બરાબર) છે. અથવા સમખૂણુ લૉક્ષેજને ચોરસ કહેછે.

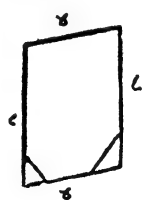


(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

૩૨. (૩) દીર્ઘસમખૂણુચોખ્ખણ, જે ચોખ્ખણની સામસામેની બાજુઓ બરાબર પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને સઘળા ખૂણા કાટખૂણા છે. એને કાટખૂણુ ચોખ્ખણ અથવા લંબચોરસ પણ કહેછે.



૩૩. (૪) દીર્ઘવિષમખૂણુચોખ્ખણ, જે ચોખ્ખણની સામસામેની બાજુઓ બરાબર છે, પણ પાસપાસેની બાજુઓ બરાબર નથી; અને ખૂણા કાટખૂણા નથી. એને રૉમ્બાઈડ પણ કહેછે.



(ઉપરની બંને વ્યાખ્યાઓમાં માત્ર ખૂણાઓનોજ તફાવત છે.)

*પાંત્રીશમી વ્યાખ્યા પ્રથમ સમજાવ્યા પછી આ અને નીચેની વ્યાખ્યાઓ સમજાવવી. મૂળ ગ્રંથના ક્રમને વળગી રહેવા અહીં વ્યાખ્યાઓનો ક્રમ ફેરવ્યો નથી.

ત્રિકોણ અને ચોખ્ખણના જુદા જુદા પ્રકાર સમજવાને આકૃતિની બાજુઓમાં આંકડા મૂકેલા છે. અને જરૂર છે ત્યાં ખૂણાઓમાં પણ નિશાની કરી છે.

૩૪. બીજી સધળી ચોખ્ખીપ્રકૃતિઓને ચતુર્સીમા (ત્રાપીજ્યમ*) કહેછે.

૩૫. સમાંતર* સીધી લીટીઓ તેજ, જે લીટીઓ એકજ સદ્ધાષમાં છે. અને તેમને બંને દિશામાં ગમે તેટલી વધારીએ _____
તોજણ કદિ મળે નહિ.

સ્વીકૃત પક્ષો.

એવું સ્વીકારેલું (કબૂલ રાખેલું) છે કે:—

૧. કોષપણ એક બિંદુથી કોષપણ બીજા બિંદુસુધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.

૨. અંતવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સુધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.

૩. કોષપણ મધ્યબિંદુ ધારીને તે મધ્યબિંદુથી કોષપણ અંતરે એક ગોળ દોરી શકાય છે.

મત્યક્ષ (ખુણાં) પ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો*—માપઅથવાપ્રકૃતિ—એકજ પરિમિતની બરાબર છે, તેઓ અરસ્પરસ બરાબર છે.

૨. જે સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાંગો સંમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૧૫ તેમાં ૫, ૫ મેળવ્યાં તો સર્વાંગો ૨૦, ૨૦ થશે.

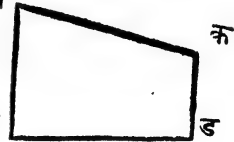
૩. જે સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી સમ રહેશે. જેમકે ૧૫, ૧૫ તેમાંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો બાકી ૧૦, ૧૦.

૪. જે વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવ્યાં તો, સર્વાંગો વિષમ થશે. જેમકે, ૧૫, ૨૦ તેમાં ૪, ૪ મેળવ્યા તો ૧૯, ૨૪.

* એક તરફની સામસામેની (અંબ તથા કંડ) જ

બે બાજુઓની જોડ સમાંતર પણ બીજી તરફની સામસામેની (અંબ તથા કંડ) બે બાજુઓની જોડ

સમાંતર નહિ એવા ચોખ્ખીને ત્રાપીજોઈડ કહેછે. [અ એનો ત્રાપીજ્યમમાં સમાવેશ થાય છે.



* જોણમાં જોણી બે લીટીઓ હોય ત્યારે એક બીજી સાથે સમાંતર થઈ શકે.

x પરિમિત=(પરિ-ચોતરફ+મા-માપવું+ત. ભૂ. ફ. મ.) ચોતરફનું માપ.

૫. જે વિષય પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કીધાં તો, બાકી વિષય રહેશે. જેમકે, ૨૦, ૨૫ માંથી ૫, ૫ બાદ કરીએ તો ૧૫, ૨૦.

૬. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોની બમણાઇઓ બરાબર છે.

૭. એકજ અથવા બરાબર પરિમિતોનાં અંદાં બરાબર છે.

૮. જે પરિમિતો અસ્પરસ મળી જાયછે, અથવા એકજ અવકાશની માંહે બરાબર માર્ગ રહેછે, તેઓ બરાબર છે.

૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મોટું છે.

૧૦. બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૧. સઘળા કાટખૂણા બરાબર હોયછે.

૧૨.* જે બે (અથવા તથા કહ) સીધી લીટીઓને એક (ઈં ક) સીધી લીટી એવી રીતે છેદે કે, તેની એક આખુના (જે ઈં ક તથા ક ફ ઈં) માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય, અ

ઈ	ક
ક	ફ

તો જે આખુ બણી બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા ખૂણા છે તે આખુ બણી એ બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો, તેઓ મળશે. પણ જે તે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર હોય અથવા તે કરતાં વધારે હોય તો, તે તરફ તે બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો કદિ મળશે નહિ.

અવરા શબ્દના અર્થ.

૧. પ્રતિજ્ઞા—ભૂમિતિમાં તર્ક કર્યાથી જે પરિણામો નીકળેછે તે.

૨. પ્રતિજ્ઞાઓ બે જાતની છે. ૧ કૃત્ય. ૨ પ્રમેય.

૩. કૃત્ય—જેમાં કાંઈ કરવાનું કહેલું છે. જે માગેલું હોય તે આંકણી તથા કંપાસની મદદથી શી રીતે થઈ શકે, તે બતાવવું તે કૃત્યનું સાધન છે. સાધનમાં દેખાડેલી રીતથી માગેલું પરિણામ બરાબર મળે છે કે નહિ તે સિદ્ધ કરવું એજ કૃત્ય સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધતા છે.

૪. પ્રમેય—જેમાં કાંઈ તત્વની સત્યતા કહેલી છે તે. જે પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો અને વ્યાખ્યાઓ અથવા તે પ્રમેયની પૂર્વે અને તેના ઉપર આધાર ન રાખતાં સિદ્ધ કાંઈકેલી બીજી સત્યતાઓમાંથી કહેલા તત્વની સત્યતા કેવી રીતે નીકળી શકે, તે બતાવવું એ પ્રમેય સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધતાનો વિષય છે.

* આ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ અઘાવીશમી પ્રતિજ્ઞા શીખવતાં સુધી સમજાવવાની જરૂર નથી.

૫. કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા સ્વીકૃતપક્ષ જોડે અને પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણુ જોડે સંબંધી છે.

૬. સ્વીકૃત પક્ષ—જે કૃત્યનું સાધન સ્વીકારેલું છે.

૭. પ્રત્યક્ષ પ્રમાણુ—જે પ્રમેયની સત્યતા સિદ્ધતાવિના કપ્પૂલ રાખેલી છે.

૮. આકૃતિ રચના—પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવાને વાસ્તે તે પ્રતિજ્ઞાનાજ સમુદાહરણમાં જે લીટીઓ ખરેખરી કહેલી છે; તે વિના ખીજી લીટીઓ ધણીવાર દોરવી પડે છે. આવી લીટીઓ દોરવી તેને આકૃતિ રચના કહે છે.

૯. અનુમાન—જે પ્રતિજ્ઞા ઉપરથી સહેજ નીકળે છે તે.

૧૦. ટિકા—પ્રતિજ્ઞા ઉપરની ચર્ચા, તે અનુમાન કહેવાય નહિ.

૧૧. પૂર્વ સિદ્ધાંત—જે પ્રતિજ્ઞા કોઈ વધારે અગત્યની પ્રતિજ્ઞા સ્થાપન કરવાને વાસ્તે માત્ર લખેલી હોય છે તે. જેમકે, સાતમી પ્રતિજ્ઞા દ્વક્ત આઠમી પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવા સાર લખેલી છે.

૧૨. ઉપન્યાસ—ધારેલી વાત. એટલે, પ્રતિજ્ઞાના સમુદાહરણમાં જે ભાગમાં કાંઈ વસ્તુ સાચી આપેલી છે એમ ધારેલું છે. અને જે ઉપરથી કહેલી અનુમિતિ કાઢવાની છે.

પ્રતિજ્ઞા લખવાની રીતિ.

પ્રથમ પ્રતિજ્ઞાનો નંબર અને જાત, પછી મથાળું; કૃત્ય હોય તેા સાધન અને પછી સિદ્ધતાનો વિષય આવે. બિંદુ એક અક્ષરથી, લીટી બે અક્ષરથી અને ખૂણા ત્રણ અક્ષરથી અગર એક અક્ષરથી બતાવાય છે. ખૂણાને વાસ્તે ત્રણ અક્ષર લીધા હોય ત્યારે, મથાળાનો અક્ષર વચ્ચે આવવો જોઈએ. ત્રિકોણ ત્રણ અક્ષરથી, ચોખૂણુ સામસામેના—કર્ણના છેડાના—બે અક્ષરથી અને બહુખૂણુ ધણા અક્ષરોથી બતાવાય છે. તેમજ ગોળને વાસ્તે પરિધમાં ત્રણ અક્ષર લેવાની રીત છે.

અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોના ક્રમ અ, બ, ક, ડ, ઈ, ફ, ગ, હ, ઐ વગેરે છે. માટે, એ અક્ષરો બાળશ્રોધમાં લખીને સંજ્ઞા આપી છે.

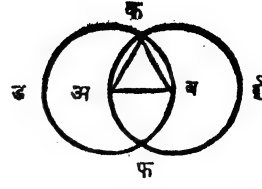
પ્રતિજ્ઞા ૧ લી કૃત્ય.

કોઈ આપેલી (અ બ) અંતવાનસીધીલીટી ઉપર એક સમખાણુ ત્રિકોણુ કરવાનું.

સાધન

અ મધ્યબિંદુ ધારીને અ બ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) બક ડ ગોળ

દોરો; તેમજ વ મધ્યબિંદુ ધારીને વ અ
ત્રિજ્યાએ બીજું અ ક ર્ ગોળ દોરો. આ
ગોળના ક છેદન બિંદુથી આપેલી સીધી
લીટીના અ તથા વ છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.)
સીધી લીટીઓ દોરો. ત્યારે જે સમબાણુ ત્રિકોણુ કરવો હતો તે અ ક વ
ત્રિકોણુ થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, અ ક તથા અ વ લીટીઓ એકજ વ ક ડ ગોળની ત્રિજ્યાઓ
છે માટે તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને વ ક તથા વ અ એકજ
અ ક ર્ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે, તેઓ પણ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે.
એટલે, વ ક તથા અ ક લીટીઓ એકજ અ વ લીટીની બરાબર થઈ તેથી,
(૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેઓ ત્રણે અરસ્પરસ બરાબર છે. એટલે, અ વ ક ત્રિકોણુની
ત્રણે બાજુઓ બરાબર છે. માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તે સમબાણુ ત્રિકોણુ
છે એ સિદ્ધ.

૧. અંતવાન સીધી લીટી ઉપરજ સમબાણુ ત્રિકોણુ થાય. અનિત
કે અનંત લીટી ઉપર થાય નહિ કેમકે તેનું માપ નથી.

૨. પ્રત્યેક ગોળ બીજા ગોળના મધ્યબિંદુમાં થઈને જાયછે; તેથી તેના
પરિધનો એક ભાગ બીજા ગોળની માંડે અને બીજો ભાગ બીજા ગોળની
બહાર પડવો જોઈએ. તેથી બંને ગોળો છેદાવાજ જોઈએ.

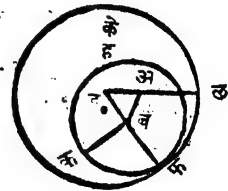
૩. આપેલી લીટીની બંને તરફ સમબાણુ ત્રિકોણુ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨ જ કૃત્ય.

કોઈ આપેલા (અ) બિંદુથી, એક આપેલી (વ ક) અંતવાનસીધી-
લીટીની બરાબર એક સીધી લીટી દોરવાનું.

સાધન.

આપેલા (અ) બિંદુથી આપેલી અંતવાન સીધી લીટી (વ ક) ના એક
વ છેડા સુધી (૧ સ્વી. પ્ર.) એક સીધી લીટી દોરો.
અને અ વ લીટી ઉપર એક અ ડ વ સમબાણુ
ત્રિકોણુ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. વ મધ્ય બિંદુથી વ ક
ત્રિજ્યાએ એક ક હ ફ ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો.
આ ગોળના પરિધને ફ આગળ મળે ત્યાં સુધી



ઢંચે ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને ડં મધ્ય બિંદુથી ડફ ત્રિજ્યાએ ખીન્નું ફલકે ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો. આ ગોળના પરિધને લ આગળ મળે ત્યાં સુધી ડઅ લીટીને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે દોરવાની લીટી અલ લીટી થશે.

સિદ્ધતા.

ક્રમકે, ડલ તથા ડફ લીટીઓ એકજ ફલકે ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી (૧૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે. વળી ડઅ તથા ડચ લીટીઓ વડઅ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે. તેથી (૨૪ વ્યા. પ્ર.) તેઓ પણ બરાબર છે. પહેલી કહેલી બે ડલ તથા ડફ બરાબર લીટીઓમાંથી આ ડઅ તથા ડચ બરાબર લીટીઓ બાદ કરીએ તો, બાકી અલ તથા વફ (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. પણ વફ તથા વક એકજ કહફ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી, તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અલ તથા વક બંને પ્રથક પ્રથક વફ ની બરાબર છે તેથી, (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) તેઓ અસ્પર્શ બરાબર છે. માટે, વક ની બરાબર અલ લીટી છે અને તે કહેલા અ બિંદુથી દોરેલ છે.

૧ આપેલા બિંદુને આપેલી સીધી લીટીના એક છેડા સાથે સાંધવું. તે છેડાને સંધાએસો છેડો અને સાંધનારી લીટીને સાંધનારી લીટી કહેવી.

૨ સાંધનારી લીટીની ઠાઠપણુ એક બાજુએ સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો.

૩ પહેલા (નાના) ગોળનું મધ્યબિંદુ સંધાએસો છેડો થાય અને આપેલી લીટી તે ગોળની ત્રિજ્યા થવી જોઈએ.

૪ આપેલા બિંદુની સામેની બાજુએ સમબાજુ ત્રિકોણની જે બાજુ હોય, તે બાજુને આપેલી લીટીના સંધાએસો છેડાની પાર નાના ગોળના પરિધને મળતાં સુધી વધારવી જોઈએ.

૫ સાંધનારી લીટીની સામે ત્રિકોણનું જે શિરોબિંદુ છે તે મોટા ગોળનું મધ્યબિંદુ લેવું જોઈએ અને ત્યાંથી તે, નાના ગોળના પરિધને અડતાં સુધી થયેલી લીટીને મોટા ગોળની ત્રિજ્યા લેવી જોઈએ.

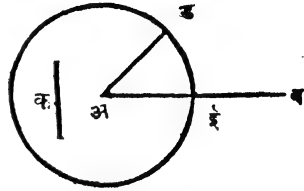
૬ સમબાજુત્રિકોણની બાકીની બાજુને કહેલા બિંદુની પાર મોટા ગોળના પરિધને મળતાં સુધી વધારી તો, તે વધારો દોરવાની લીટી થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૩ જ કૃત્ય.

કોઈ આપેલી (અથ તથા ક) બે સીધી લીટીઓમાંની મોટી (અથ) માંથી નાની (ક) ની બરાબર એક ભાગ કાપવાનું.

સાધન.

મોટીના કોષ/ખુ અ છેડાથી નાની ક ની બરાબર (૨ પ્રતિ. પ્ર.) અઢ સીધી લીટી દોરો. અને અ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને અઢ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્વી. પ્ર.) એક ગોળ દોરો. ત્યારે આ ગોળથી કપાએલ મોટીનો ભાગ અઈ નાની ક ની બરાબર છે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, અઈ તથા અઢ એકજ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી તેઓ (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ક તથા અઢ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) બરાબર છે તેથી અઈ તથા ક (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

૧ આપેલી બંને લીટીઓ અંતવાન જોઈએ.

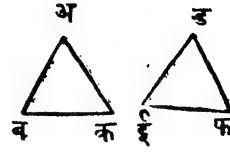
૨ નાની લીટીને વધારીને મોટી જેવડી કરવી હોય તો, મોટીને ત્રિજ્યા ધારી. ગોળ દોરવો. પછી ગોળના પરિઘ સુધી નાનીને વધારવી.

પ્રતિજ્ઞા ૪ થી પ્રમેય.

જો, (વઅક તથા ઈઢફ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા અક) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ઢઈ તથા ઢફ) બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને તે બાજુઓના (વઅક તથા ઈઢફ) અંતર ખૂણા પણ બરાબર હોય તો, વક તથા ઈફ પાયા અથવા બાકીની બાજુઓ બરાબર થશે (૧ બા. *); વળી એક ત્રિકોણના પાયા આગળના (વ તથા ક) બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના પાયા આગળના (ઈ તથા ફ) બે ખૂણાઓ જેઓ બરાબર બાજુઓની સામે છે, તેઓની (વ, ઈ ની તથા ક, ફની) બરાબર થશે (૨ બા.); અને તે ત્રિકોણો પણ બરાબર થશે (૩ બા.).

એ બે ત્રિકોણોને એવી રીતે મૂકા કે, બરાબર ખૂણાઓમાંથી એક

૪ ખૂણાનું શિરોબિંદુ બીજા અ ખૂણાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે.* અને કહેલા બરાબર ખૂણાઓની આસપાસની બાજુઓ માંહેલી એક ડહાં, બીજા ત્રિકોણમાં તેની બરાબરની અબ બાજુ ઉપર પડે.*



અને અક તથા કફ બરાબર બાજુઓની બાકીની બેડ, ખવ તથા કદે જેઓ મળી જાય છે તેઓની એકજ તરફ પડે.*

અ તથા ક શિરોબિંદુઓ તથા અવ અને કદે બરાબર બાજુઓ મળી જાય છે. તેથી વ તથા દે બિંદુઓ પણ મળી જવાં જોઈએ. જો તેઓ ન મળે અને હાંચે અગર નીચે પડે તો અવ તથા કદે બાજુઓ બરાબર થાય નહિ; અને તે ઉપન્યાસથી ઊણદું થાય; માટે વ તથા દે બિંદુઓ મળે છે. વળી, કદે બાજુ અવ ઉપર પડે છે અને અક તથા કફ બાજુઓ અવ ની એકજ તરફ પડે છે. અને વઅક તથા કફ ખૂણા બરાબર છે તેથી, કફ બાજુ અક ઉપર પડવી જોઈએ. કેમકે, જો ઉપર ન પડતાં માંહે કે બહાર પડે તો, અ તથા ક ખૂણા બરાબર થાય નહિ, એ, ઉપન્યાસથી ઊણદું થાય. માટે, કફ બાજુ અક બાજુ ઉપરજ પડે.

ક ફ બાજુ અક ઉપર પડે છે, અને તેઓ બરાબર છે તેથી, ફ છેડા ક ઉપર પડવો જોઈએ. વક તથા દેફ પાયાઓના છેડા મળી જાય છે તેથી એ પાયાઓ પણ મળી જવા જોઈએ. કેમકે, જો તેઓ નહિ મળે તો, હાંચે અગર નીચે પડે અને એમ થવાથી તેઓ અવકાશ ધેરે. એ ૧૦ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી ઊણદું થાય. માટે, તે બંને પાયા મળી જાય છે અને તેથી ૮ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણે તે બંને બરાબર છે. (૧ બા. સિદ્ધાંત).

વળી, કદે તથા દેફ બાજુઓ અનુક્રમે વઅ તથા વક જોડે

* પ્રથમ બિંદુ અને બાજુ મૂકવાની છૂટ વગર આધારે ભેદ શકાય છે.

શિક્ષકે કાગળના કડકાના આવાજ બે ત્રિકોણો બનાવી તેમાં આજ બાળબોધ અક્ષરોથી સંગ્રા આપી એક ઉપર એક મૂકી બતાવવા તેથી નિશાળીઆને જલદી સમજ પડશે.

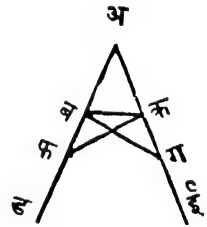
મળી જાય છે. તેથી (૮ પ્રસ. પ્ર.) ી તથા વ ખૂણા બરાબર છે; અને તે-
વાજ કારણથી ફ તથા ક ખૂણાઓ બરાબર છે. (૨ બા. સિદ્ધ થઈ).

હવે, એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ
બાજુઓ સાથે મળી જાય છે, તેથી તે ત્રિકોણો પણ મળી જાય છે, માટે,
તેઓ (૮ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ. (૩ બા.).

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી પ્રમેય.

એક (વ અ ક) સમઘી બાજુ ત્રિકોણની (અવ તથા અક) બ-
રાબર બાજુઓની સામેના (વ તથા ક) ખૂણા બરાબર છે (૧ બા.);
અને જો બરાબર બાજુઓને ત્રીજી (વ ક) બાજુના (વ તથા ક) છે-
ડાની પાર વધારી તો તેઓના વધારેલા ભાગો અને ત્રીજી બાજુથી થયેલા
(ઢવક તથા ીકવ) ખૂણાઓ પણ બરાબર થશે (૨ બા.).

ત્રીજી બાજુના વ તથા ક છેડાઓની પાર અવ તથા અક એ
બરાબર બાજુઓને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને તે
બાજુઓમાંની એકના વધારેલા ઢઢ ભાગમાં
કોઈ પણ ફ બિંદુ લો. અને બીજી બાજુના વ-
ધારેલા ભાગમાંથી અફ ની બરાબર (૩ પ્રતિ.
પ્ર.) અગ કાપો; વધારેલી બાજુઓ ઉપર એવાં
લીધેલાં ફ તથા ગ બિંદુઓને ત્રિકોણની ત્રીજી
બાજુના વ્યુત્ક્રમ છેડાઓ ફ, ક તથા વ, ગ (૧
સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



ફઅક તથા ગઅવ ત્રિકોણમાં અફ બાજુની બરાબર અગ
(આકૃ. ૨૨. પ્ર.) રાખેલી છે; અને અક તથા અવ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બ-
રાબર છે; અને અ ખુણો અને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે તેથી (૪ પ્રતિ.

આ પ્રતિજ્ઞાની આકૃતિ રચના ગુચવણ બરેલી છે કેમકે, એક
ત્રિકોણના કેટલાક અવયવો બીજા ત્રિકોણમાં આવે છે; માટે શિક્ષકે કાગળ-
ના કડકાના આવડા બે નૂદા નૂદા ત્રિકોણો બનાવી તે ત્રિકોણો એક ઉપર
એક કેવી રીતે રહેલા છે તે, તથા તેમાંના સરખા ખૂણા વગેરે અંગો
આકૃતિમાં ક્યાં અને કેવી રીતે રહેલાં છે તે બતાવવાથી વિદ્યાર્થીને જલદી
સમજ પડશે.

પ્ર.) ફક લીટી વગ ની, અકક ખૂણો અગવ ખૂણાની અને અકક ખૂણો અવગ ખૂણાની બરાબર છે.

હવે, અક તથા અગ બરાબર લીટીઓમાંથી અવ તથા અક બરાબર બાબુઓ બાદ કીધી તો, બાકીની વક તથા કગ (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. તેથી, પાયા નીચેના વકક તથા કગવ ત્રિકોણોમાંની વક તથા ફક બાબુઓ અનુક્રમે કગ તથા ગવ ની બરાબર છે; અને તે બાબુઓના અંતર ખૂણા ફ તથા ગ પણ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્ર.) બરાબર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) તે ત્રિકોણોમાંની વક ફ બાબુ સામેના ફકવ ખૂણા તે, તેની બરાબરની કગ બાબુ સામેના ગવક ખૂણાની બરાબર છે; (આ બરાબર ખૂણાઓને અકક તથા અવગ ઉપર કીધેલા બરાબર ખૂણાઓમાંથી બાદ કરીએ તો બાકી અવક તથા અકવ ખૂણાઓ ૩ પ્રત્ય. પ્ર. બરાબર રહેશે. ૧ બા. સિદ્ધ થઈ.) અને ફક બાબુ સામેના ફકવ ખૂણા તે ગવ બાબુ સામેના ગકવ ખૂણાની બરાબર છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૬ ઠી પ્રમેય,

જો, (વ અ ક) એક ત્રિકોણના (વ તથા ક) બે ખૂણાઓ બરાબર હોય તો, તેઓની સામેની (અ ક તથા અ વ) બાબુઓ પણ બરાબર થશે.*

કેમકે, જો બાબુઓ બરાબર નહિ હોય તો, ધારો કે, તેઓ માંહેલી એક અવ બીજી અક કરતાં મોટી છે. માટે, મોટીમાંથી નાની અક ની બરાબર વડ (૩ પ્રતિ પ્ર.) કાપો. અને કડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



સારે, હવક તથા અકવ ત્રિકોણોમાં વડ બાબુ વ અક ની બરાબર રાખેલી છે. અને વક અને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. તેથી, વડ તથા વક બાબુઓ અનુક્રમે અક તથા કવ બાબુઓની બરાબર છે. અને હવક તથા અકવ ખૂણા (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર

* જો પ્રતિજ્ઞાઓ પૈકી એકમાં આપેલી બાબત બીજીમાં સિદ્ધ કરવી પડે, અને એકમાં સિદ્ધ કરવાની બાબત બીજીમાં આપેલી હોય સારે તેઓ એક બીજીને બિલક પક્ષ કહેવાય. આ પ્રતિજ્ઞા પાંચમી પ્રતિજ્ઞાનો બિલક પક્ષ છે.

છે. માટે, ઢબક તથા અકબ ત્રિકોણો પણ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખાની સાથે તેનો એક ભાગ બરાબર એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે અક બાબુ કરતાં અક બાબુ મોટી નથી તેમ નાની નથી તે પણ તેવીજ રીતે સાબિત કરી શકાયે, માટે તે બંને અરસપરસ બરાબર છે. એ સિદ્ધ.*

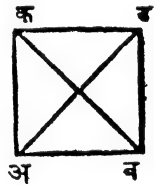
૧ કાપવાનો ભાગ શિરોબિંદુથી ન લેતાં નીચલા બિંદુથીજ લેવો જોઈએ.

૨ મોટી બાબુમાંથી નાની બાબુની બરાબર ભાગ કાપીને જેમ ઉપર પ્રમાણે પ્રતિષ્ઠા સિદ્ધ કરીએ તેમ નાની બાબુને મોટી બાબુના જેટલી વધારીને પણ આ પ્રતિષ્ઠા સિદ્ધ થઈ શકે. બંનેમાં સરખી સિદ્ધતા લાગુ થશે.

પ્રતિષ્ઠા ૭ મી પ્રમેય.

એકજ (અક) સીધી ક્ષીટી ઉપર અને તેની એકજ બાબુ તરફ જેની સીમાવાસી^૧ બાબુઓ (અક તથા અક અને વક તથા વક) બરાબર થાય, એવા (અકબ તથા અકબ) બે ત્રિકોણો કરી શકાતા નથી. જો, થઈ શકે તો, તે ત્રિકોણો કરો. અને ધારો કે, (૧) પ્રત્યેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે છે.

ક તથા ક બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર) સાંધો. ક-અક ત્રિકોણની અક તથા અક બાબુઓ (ઉપન્યાસપ્ર.) બરાબર છે. તેથી, (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમકોણ બાબુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અકક તથા અકક ખૂણાઓ



(૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ અકક ખૂણો તેના ભાગ વકક ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. તેથી અકક ની બરાબરનો અકક ખૂણો પણ વકક ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને આખો વકક ખૂણો

* કોઈ બરા તત્વને જોડું ધાર્યાથી કોઈ સ્પષ્ટ અસંભવિત ફળ નીકળે ને તેથી મૂળના તત્વને ખરૂં માનવું પડે એવી સિદ્ધતાને ઊલટી સિદ્ધતા કહે છે. સૂલકી સિદ્ધતાથી ઊલટી સિદ્ધતા ઊતરતી ગણાય છે. આ પ્રતિષ્ઠા પણ ઊલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલી છે.

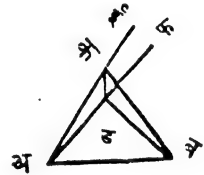
૧ જે બાબુઓ એકજ બિંદુમાંથી નીકળે છે અને સીમા કરનારી છે તે બાબુઓ.

અડક ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટા છે. માટે, વડક ખૂણા વકડ ખૂણા કરતાં તે ઘણો જ મોટો છે. હવે, કવડ ત્રિકોણમાં વેક તથા વડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વડક તથા વકડ ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ, વડક ખૂણા વકડ ખૂણા કરતાં ઘણો જ મોટો છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે, એ અસંભવિત છે. માટે, એક જ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા બે ત્રિકોણો માંહેલા પ્રત્યેકનું શિરોબિંદુ બ્યારે બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે છે, ત્યારે તેઓની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.

૨ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ડ બીજા ત્રિકોણની માંહે પડે છે; ત્યારે, અક તથા અડ બાજુઓ (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારે અને કડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

કઅડ ત્રિકોણની અક તથા અડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર

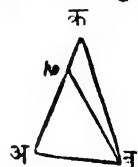
છે. તેથી તે ત્રિકોણના પાયાની બહારના ઈકડ તથા ફડક ખૂણા (૫ પ્રતિ પ્ર.) બરાબર છે. પણ ઈકડ ખૂણા તેના ભાગ વકડ ખૂણા કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે, ઈકડ ખૂણાની બરાબરનો ફડક ખૂણો પણ વકડ ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને ફડક ખૂણા કરતાં વડક ખૂણો



(૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે વડક ખૂણો વકડ ખૂણા કરતાં તે ઘણો જ મોટો છે. હવે કવડ ત્રિકોણમાં વેક તથા વડ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વડક તથા વકડ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; પણ વડક ખૂણો વકડ ખૂણા કરતાં ઘણો જ મોટો છે એવું ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે. એ અસંભવિત છે; માટે એક જ સીધી લીટી ઉપર કીધેલા ત્રિકોણો માંહેલા એકનું શિરોબિંદુ જો બીજાની માંહે હોય તો તેઓની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર થઈ શકતી નથી.

૩ જો પ્રકાર. ધારો કે, એક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ ડ બીજા ત્રિકોણની અક બાજુ ઉપર પડે છે ત્યારે એ સ્પષ્ટ છે કે, અક તથા અડ બાજુઓ (૬ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર નથી.

માટે, કોઈ પણ પ્રકારમાં જોની સીમાવાસી બાજુઓ બરાબર છે એવા બે ત્રિકોણો કહેલી લીટીની એક જ બાજુએ કરી શકાશે નહિ.



પ્રતિજ્ઞા ૮ મી પ્રમેય.

જો, (અવ ક તથા ફફડ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા વક) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ફફ તથા કડ) બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને (અક) પાયા પહો (ફફ) પાયાની બરાબર હોય તો; બરાબર બાજુઓથી થયેલા વ તથા ક અંતરબાજુ બરાબર થશે.

ક્રમકે, અવક ત્રિકોણ ઉપર ફફડ ત્રિકોણને એવી રીતે મૂકા કે, અ બિંદુ ઉપર ફ બિંદુ પડે, અને અક પાયા ઉ-

પર ફફ પાયા પડે, તેથી ક અને ડ બિંદુઓ મળી જશે. જો એ બે બિંદુઓમાંથી એક બિંદુ

બીજાની બહાર કે માંહે પડે તો, પાયા બરાબર નહિ થાય અને એ ઉપન્યાસથી ઉત્પન્ન થશે માટે ક અને ડ બિંદુઓ મળી જશેજ.

હવે, બંને ત્રિકોણોમાં શિરો બિંદુઓ પાયાની એકજ તરફ પડે, અને અવ તથા ફફ અને વક તથા કડ બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય તો ક શિરોબિંદુ વ શિરોબિંદુ ઉપરજ પડવું જોઈએ. ક્રમકે, જો તેમ ન પડે તો, તે બંને જૂદાં જૂદાં પડે; એ, ૭ મી પ્રતિજ્ઞાથી ઉત્પન્ન થાય. માટે અવ તથા વક બાજુઓ ફફ તથા કડ બાજુઓની સાથે મળી ગઈ. તેથી, તેની વચ્ચેના અવક તથા ફફડ બાજુ (૮ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧ આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર અંતરબાજુ બરાબર કર્યા છે. પરંતુ પછી બોધી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બાકીના બાજુઓ તથા બંને ત્રિકોણો બરાબર થાય.

(બીજી રીતે) આ પ્રતિજ્ઞા નીચે પ્રમાણે પણ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

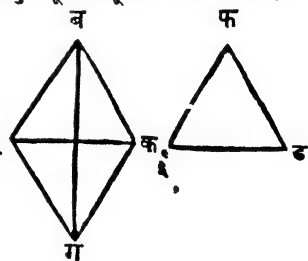
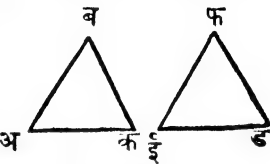
ત્રિકોણના પાયા (અક અને ફક) ઉપરાઉપરી પડે, બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય, અને ત્રિકોણો વિરુદ્ધ બાજુએ પડે.

ત્યારે, વગ શિરોબિંદુઓને સાંધે એવી વગ સીધી લીટી (૧ સ્તી. પ્ર.) દોરો. (તેથી આકૃતિ રચના નીચે પ્રમાણે ત્રણ જૂદી જૂદી રીતે થશે.) ૧ હું ધારો કે, વગ લીટી પાયાને છેદે છે.

હવે, ફફડ ત્રિકોણ તે અગ્ર ત્રિકોણ

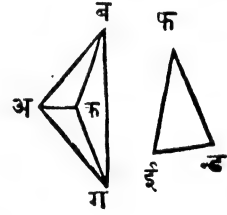
થયો. તેથી, ક શિરોબિંદુ ગ આગળ, ફફ બાજુ તે અગ્ર સ્થળે અને ડક તે કગ

સ્થળે પડે છે. વઅ તથા ફફ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, વઅ તથા અગ

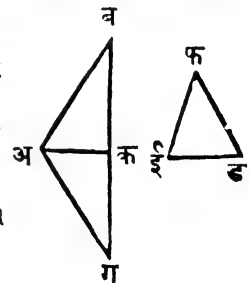


બરાબર છે. તેથી ગઅવ ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમદ્વીબાંતુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના અવગ તથા વગઅ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ વક તથા ફડ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને ફડ ની બરાબર ગક છે માટે, ગકવ ત્રિકોણમાં વક તથા ગક બાંતુઓ બરાબર થઈ. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) તે સમદ્વીબાંતુ ત્રિકોણ થયો. માટે, તેના ગવક તથા કગવ ખૂણાઓ પણ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓ સાથે મેળવ્યા તો, આખા અવક તથા અગક ખૂણાઓ (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. અને અગક ખૂણો તે, ર્ફક ખૂણાની બરાબર છે તેથી અવક તથા ર્ફક ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૨ જી ધારો કે, વગ લીટી મળી ગયેલા પાયાની બહાર પડે છે. ઉપર ખતાવ્યા પ્રમાણે ગઅવ સમદ્વી બાંતુ ત્રિકોણ છે. તેથી, ગવઅ તથા વગઅ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને માંહે નો ગકવ ત્રિકોણ પણ સમદ્વી બાંતુ ત્રિકોણ છે. તેથી, ગવક તથા કગવ ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓ પહેલા બરાબર કરેલા ખૂણાઓમાંથી બાદ કરે તો, બાકી અવક તથા અગક ખૂણાઓ, (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને અગક ખૂણો એ ર્ફક ખૂણાની બરાબર છે તેથી અવક તથા ર્ફક ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



૩ જી ધારો કે, વગ લીટી પાયાના કાઢપણુ એક છેડાની પાર ન્યછે. વક તથા કગ લીટીઓ (૧૦ પ્રત્ય. પ્ર.) વગ સાથે મળી નવી જોધએ. અને ગઅવ સમદ્વી બાંતુ ત્રિકોણ છે તેથી પાયા આગળના વ તથા ગ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થશે. અને ગ ખૂણો તે ફ ખૂણાની બરાબર છે તેથી વ તથા ફ ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા એ સિદ્ધ.



પ્રતિજ્ઞા ૯ મી કૃત્ય.

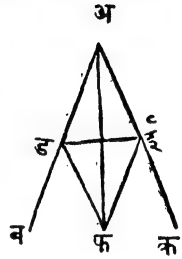
કાઈ આપેલા (વચક) સીધી લીટી ખૂણાને દુભાગવાનું.

સાધન.

અવ બાજુમાં કાઈ પણ ઢ બિંદુ લો. અને અક માંથી અડ ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) અઈ કાપો. ડઈ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને તે ઉપર અ ની સામેની તરફ ઢક ફેં સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો અને અ તથા ફ બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, અ ફ સાંધનારી લીટી કહેલા વચક ખૂણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા.

ફઅડ તથા ફઅઈ ત્રિકોણોમાં અડ તથા અઈ બાજુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) બરાબર છે; અફ બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને ફડ તથા ફઈ (ડફઈ સમબાજુ ત્રિકોણોની બાજુઓ છે માટે ૨૪ વ્યા. પ્ર.) પણ બરાબર છે. માટે, ફઅડ તથા ફઅઈ ખૂણાઓ (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી અફ સીધી લીટી કહેલા વચક ખૂણાને દુભાગે છે એ સિદ્ધ.



૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં એ અગત્યનું છે કે, સાંધનારી ડઈ લીટીની જેણી તરફ કહેલો ખૂણો હોય તેની ઉલટી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કરવો. નહિતો, સમબાજુ ત્રિકોણનું ફ શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના અ શિરોબિંદુ સાથે કદાચ મળી જાયતો, અ ફ સાંધનારી લીટી થશે નહિ અને તેથી સાધન પણ થશે નહિ.

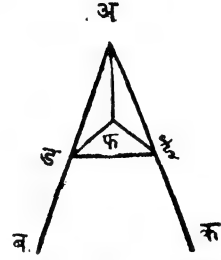
૨ તો પણ જે પ્રકારોમાં સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુ સાથે મળી જતું નથી, તે પ્રકારોમાં ડઈ સાંધનારી લીટીની જે તરફ કહેલો ખૂણો છે, તેણી તરફ સમબાજુ ત્રિકોણ કીધાથી આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકે છે. જે ધ્રિયતિઓમાં શિરોબિંદુ આવે, તે એ ધ્રિયતિઓને વાસ્તે નીચે પ્રમાણે સિદ્ધતાની જરૂર છે.

* આ પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બેનો ધાત કરવાથી જે સંખ્યા આવે તે સંખ્યા જેટલા એક સીધી લીટી ખૂણાના સમાન ભાગો થઈ શકે.

(૧૯)

૧ હું ધારો કે, સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની માંહે પડે છે.

ઉપર જે સિદ્ધતા આપી છે તેમાં કાંઈપણ ફેરફાર કર્યા વિના અહીં બરાબર લાયક થશે.



૨ જ્યાં ધારો કે, સમબાજુ ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ કહેલા ખૂણાના શિરોબિંદુની બહાર પડે છે.

આ પ્રકારમાં ફઅ લીટીને વધારીશું તો તે, કહેલા ખૂણાને દુભાગશે. કેમકે, ઢફઅ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ

અનુક્રમે ફફઅ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની

(ઢફ તથા ફફ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, ૨૪ વ્યા. પ્ર. અને અડ તથા

અફ આકૃતિ ૨૫. પ્ર. અને ફઅ બંનેમાં સાધારણ છે માટે) બરાબર છે. તેથી ઢફઅ

તથા ફફઅ ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. વ

બળી, ઢફગ તથા ફફગ ત્રિકોણોમાં પણ ઢફ તથા ફફ બાજુઓ બરાબર છે,

ગફ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને ઢફગ તથા ફફગ ખૂણા બરાબર છે. માટે, ઢગ તથા ફગ પાયાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને

ઢગઅ તથા ફગઅ ખૂણાઓ પણ બરાબર છે.

હવે, ઢગઅ તથા ફગઅ ત્રિકોણોમાં ઢગ તથા ફગ બાજુઓ બરાબર છે. અગ બંનેમાં સાધારણ છે. અને ગ આગળના બંને

તરફના ખૂણા બરાબર છે માટે ઢઅગ તથા ફઅગ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

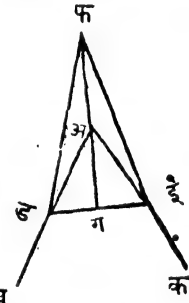
પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.

પ્ર.) બરાબર છે. અને તેથી વઅક ખૂણા અગ થી દુભાગાયો એ સિદ્ધ.



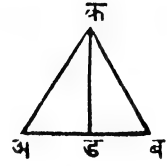
પ્રતિજ્ઞા ૧૦ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અથ) અંતવાન સીધી લીટીને દુભાગવાનું.

૧ અમિત કે અનંત સીધી લીટી દુભાગી શકાય નહિ કારણ કે, તેના માપની હદ નથી.

સાધન.

આપેલી અથવા સીધી લીટી ઉપર એક અકર સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને અકર ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને દુભાગનારી લીટીને કહેલી લીટીમાં (ક આગળ) મળતાં સુધી (૨૨વી. પ્ર.) વધારો. આ (કક) લીટી કહેલી અથવા લીટીને ક બિંદુ આગળ દુભાગે છે.



સિદ્ધતા.

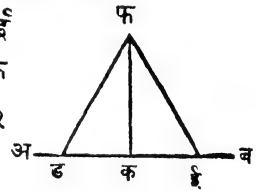
અકર તથા વકર ત્રિકોણોમાં અક તથા વક બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. અને કક બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને અકર તથા વકર ખૂણા પણ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, અક તથા વક ખાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, અથવા સીધી લીટી ક બિંદુ આગળ દુભાગાએલી છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અથવા) સીધી લીટીમાં એક આપેલા (ક) બિંદુથી આપેલી લીટી ઉપર લંબ દોરવાનું.

સાધન.

આપેલી અથવા લીટીમાં કોઈ પણ ક બિંદુ લો અને કક ની બરાબર કઈ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો; કક ઉપર એક કકઈ સમબાજુ ત્રિકોણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને ફક (૧ ૨વી. પ્ર.) દોરો. એટલે, તે લીટી કહેલી લીટી ઉપર લંબ છે એવું સિદ્ધ થશે.



સિદ્ધતા.

કમક, કકક તથા ફકક ત્રિકોણોમાં કક ને ફક બાજુઓ કકઈ સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુઓ છે માટે, (૨૪ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને કક તથા ફક બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. અને ફક બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. માટે, કક તથા ફક બરાબર બાજુઓની સામેના કકક તથા ફકક ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, આપેલી અથવા સીધી લીટી ઉપર ક બિંદુ આગળ ફક (૧૦ વ્યા. પ્ર.) લંબ છે એ સિદ્ધ.

(૨૧)

૧. આપેલી સીધી લીટીમાં અંતવાન તથા અમિત (અનંતવાન) સીધી લીટી એ બંનેનો સમાવેશ થાય છે.

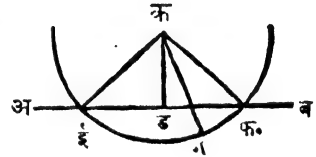
૨. આપેલી લીટી કદાપિ અંતવાન હોય અને તેની અંદરનું બિંદુ એક છેડા ઉપરજ આપ્યું હોય તો, તે છેડા તરફ તે લીટીને ૨ ગા સ્વી. પ્રમાણે બધારીને આ કૃત્યનું સાધન થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૨ મી કૃત્ય.

કોઈ આપેલી અનિયમિત સીધી લીટી અંત ની બહાર એક (ક, બિંદુ આપેલું છે, સાંધી આપેલી લીટી ઉપર એક લંબ ઊતારવાનું.

સાધન.

આપેલી લીટીની બીજી બાજુ તરફ કોઈ પણ ગ બિંદુ લો અને કગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો અને ક મધ્યબિંદુ ધારીને કગ ત્રિજ્યાએ આપેલી લીટીને ફ તથા ફ બિંદુઓમાં કાપે એવું એક ગોળ (૩ સ્વી. પ્ર.) દોરો. અને ફફ તથા કફ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો, હવે, ગોળના પરિધયી કપાએલી ફફ લીટીને ફ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો અને કહેલા ક બિંદુથી દુભાગ બિંદુ સુધી કફ સીધી લીટી (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. એટલે આ કફ લીટી દોરવાનો લંબ થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, ફફ તથા કફ ત્રિકોણોની ફફ તથા કફ બાજુઓ ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે માટે (૧૫ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ફફ તથા કફ બરાબર રાખેલી છે. અને કફ બંનેમાં સાધારણ છે. તેથી ફફ તથા કફ બાજુ (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે અંત લીટી ઉપર કફ (૧૦ વ્યા. પ્ર.) લંબ છે એ સિદ્ધ.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એ અગત્યનું છેકે, આપેલી સીધી લીટી લંબાઈમાં અનિયમિત નોંધાવે.

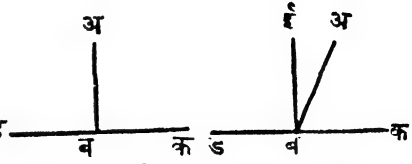
પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી પ્રમેય.

જ્યારે એક (ક) સીધી લીટી ઉપર બીજી (અ) સીધી લીટી પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે છે, ત્યારે તેઓ બે કાટખૂણા છે. અથવા તેઓનો

સર્વાંગો બે કાટખૂણા બરાબર છે.

(પહેલી આકૃતિ) ને અવ સીધી
લીટી ઢક લીટી ઉપર લંબ હોય

તો, અવક તથા અવઢ ખૂણા ઢ



(૧૦ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા છેજ. (પહેલી આકૃતિ) (બીજી આકૃતિ)
પણ ને અવ લંબ ન હોયતો, (બીજી આકૃતિ જુઓ) ઢક ઉપર વ બિંદુથી

(૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) વર્ગ લંબ દોરો. અને તેથી ઢવર્ગ તથા કવર્ગ ખૂણા (૧૦

વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણા થયા. પણ કવર્ગ ખૂણા કવઅ તથા અવર્ગ ખૂણા મ-

ળીને થયેશે છે. હવે, આખા કવર્ગ ખૂણામાં ઈવઢ ખૂણા મેળવો. તેમ કવર્ગ

ખૂણાના ભાગ કવઅ તથા અવર્ગ ખૂણાઓમાં પણ ઈવઢ ખૂણા મેળવો

એટલે, કવર્ગ તથા ઈવઢ નો સર્વાંગો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) કવઅ તથા અવર્ગ

તથા ઈવઢ એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાંગો બરાબર થશે.

વળી, ઢવઅ ખૂણા ઢવર્ગ તથા ઈવઅ ખૂણા મળીને થયેશે છે. એ-

ઓમાં અવક ખૂણા મેળવો એટલે, ઢવઅ તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાંગો

ઢવર્ગ તથા ઈવઅ અને અવક એ ત્રણ ખૂણાના સર્વાંગો બરાબર થયો;

પણ કવર્ગ તથા ઈવઢ ખૂણાઓનો સર્વાંગો આજ ત્રણ ખૂણાના સર્વાંગોની

બરાબર આપણે ઉપર કરી ગયા છીએ, તેથી, ઢવઅ તથા અવક ખૂણા-

ઓનો સર્વાંગો કવર્ગ તથા ઈવઢ ખૂણાના સર્વાંગો બરાબર છે. અને કવર્ગ

તથા ઈવઢ ખૂણાઓનો સર્વાંગો બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, ઢવઅ

તથા અવક ખૂણાઓનો સર્વાંગો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરા-

બર છે એ સિદ્ધ.

(બીજી રીતે) અથવા આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં આઠમા પ્રત્યક્ષ-

પ્રમાણનો ઉપયોગ કરવાથી સ્પષ્ટ જણાશે કે, કવઅ તથા અવઢ ખૂણા-

ઓનો સર્વાંગો કવર્ગ તથા ઈવઢ ખૂણાના સર્વાંગો બરાબર છે. અને કવર્ગ તથા

ઈવઢ ખૂણાનો સર્વાંગો (૧૦ વ્યા. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. આટલે કવઅ

તથા અવઢ ખૂણાનો સર્વાંગો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૪ મી પ્રમેય.

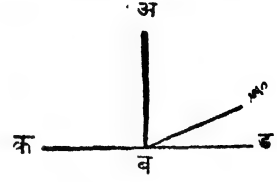
ને, (વક તથા વઢ) બે સીધી લીટીઓ એક બીજી (અવ)

સીધી લીટીને એકજ (વ) બિંદુ આગળ અને વિરુદ્ધ બાજુઓ તરફ મળીને

ને ખૂણાઓ કરે, તેઓનો સર્વાંગો ને બે કાટખૂણા બરાબર હોય તો, તે

વક તથા વઢ સીધી લીટીઓથી એક(કઢ) અખંડ સીધી લીટી થશે.

કેમકે, એમ ધારો કે, વક્ર સીધી લીટીનો વંડ વધારો નથી. પણ
 વંડ છે. ત્યારે, કવઅ તથા અવઈ ખૂણાઓનો
 સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર
 છે; પણ ઉપન્યાસ પ્ર. કવઅ તથા અવઈ
 ખૂણાનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે:
 માટે, કવઅ તથા અવઈ ખૂણાઓનો સર્વાળો



(૧ પ્રસ. પ્ર.) કવઅ તથા અવઈ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર થયો: આ બ-
 રાબર પરિમિતોમાંથી કવઅ ખૂણો જે બંનેમાં સામાન્ય છે તે બાદ કરો
 એટલે, અવઈ તથા અવઈ ખૂણા બાકી રહેશે તે (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર
 રહેશે. પરંતુ, અવઈ ખૂણો અવઈ ખૂણાનો ભાગ છે તેથી, ભાગ આખાની
 બરાબર થાય એ (૯ પ્રસ. પ્ર.) અસંભવિત છે; માટે, વંડ એ વક્ર નો
 વધારો નથી. અને તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, વંડ વિના બીજી
 કોઈપણ લીટી તેનો વધારો નથી. માટે વક્ર ની સાથે વંડ મળ્યાથી એક
 અખંડ સીધી લીટી થાય છે એ સિદ્ધ.*

પ્રતિજ્ઞા ૧૫ મી પ્રમેય.

જો (અવ તથા કઈ) બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે તો, સામ
 સામેના (અઈક તથા વંડઈ અને કઈવ તથા અઈઈ) ખૂણાઓ બરાબર થશે

કઈ સીધી લીટી અવ સીધી લીટી ઉપર પડે છે તેથી, અઈક તથા
 કઈવ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે; અને
 વંડ સીધી લીટી કઈ સીધી લીટી ઉપર પડે છે, તેથી કઈવ તથા વંડઈ
 ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે ક
 કાટખૂણા બરાબર છે; તેથી અઈક તથા કઈવ અ
 ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧ પ્રસ. પ્ર.) કઈવ તથા
 વંડઈ ખૂણાના સર્વાળા બરાબર છે. આ બંને બરાબર સર્વાળામાંથી કઈવ
 જે બંનેમાં સામાન્ય ખૂણો છે તે બાદ કરો એટલે, બાકી અઈક તથા વંડઈ

* ઉત્તરી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરેલ છે.

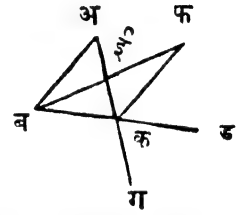
ખૂણા જેઓ સામસામે છે તે (૩ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર રહેશે. અને એજ પ્રમાણે કઈંક ખૂણો અર્ધ ખૂણાની બરાબર છે એવું સિદ્ધ થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૬ મી પ્રમેય.

જો કોઈ (વઅક) ત્રિકોણની એક (વક) બાજુને વધારી તો, બહારનો (અકક) ખૂણો, માંહેના (અકવ) ખૂણાની સામેના (વઅક અથવા અવક) ખૂણા માંહેલા કોણપણ એક ખૂણા કરતાં મોટો છે. (પ્રથમ વઅક ખૂણા કરતાં અકક ખૂણો મોટો છે એવું સિદ્ધ કરીએ.)


કેમકે, અક બાજુને ર્ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો, અને બર્ડ (૧ સ્વી. પ્ર.) દોરો. વળી, બર્ડ ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો અને તેમાંથી બર્ડ ના જેવડી ર્ફ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ફક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

કર્ફ તથા અર્ડ ત્રિકોણોમાં કર્ફ તથા ર્ફ બાજુઓ અનુક્રમે (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) અર્ડ તથા ર્ડ



બાજુઓની બરાબર છે. અને કર્ફ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ર્ફ તથા વઅક ખૂણા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. ર્ફ ખૂણા કરતાં અકક ખૂણો (૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે માટે, ર્ફ ખૂણાની બરાબરના વઅક ખૂણા કરતાં પણ અકક ખૂણો મોટો છે.

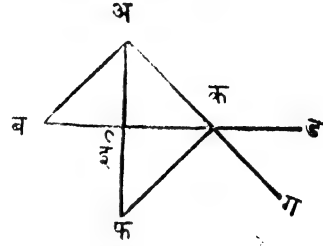
૧ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરવામાં ત્રિકોણની માંહેના જે ખૂણા કરતાં બહારનો ખૂણો મોટો કરવો હોય, તે બંને ખૂણાની સાથે તે ત્રિકોણની જે બાજુ જોડાએલી હોય, તે બાજુને દુભાગવી જોઈએ.

 આ આકૃતિમાં અક બાજુને વધાર્યાથી થયેલો બહારનો વકગ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અકક ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, વકગ ખૂણો પણ માંહેના વઅક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

અથવા.

આપેલા (વઅક) ત્રિકોણનો બહારનો (અકઢ) ખૂણો માંહેના (અવક) ખૂણા કરતાં મોટો છે (એ બા. સિદ્ધ કરીએ).

ઉપર કહેલા નિયમ પ્રમાણે તે બંને ખૂણા સાથે જોડાએલી વક લીટીને
 ઈ આગળ (૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો
 અને અઈ (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો. વળી
 અઈ ને (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) વધારો. અને
 તેમાંથી અઈ નેવડી ઈફ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ફક (૧૧૦ પ્ર.) સાંધો.
 અને અક (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો.



કેમકે, અઈફ તથા અઈવ ત્રિકોણોમાં અઈ તથા ઈફ બાજુઓ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) અનુક્રમે અઈ તથા ઈઅ બાજુઓની બરાબર છે અને અઈફ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અઈવ ખૂણાની બરાબર છે; માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) ઈઅફ તથા અઅઈ ખૂણા બરાબર છે; પણ, ઈઅફ ખૂણા કરતાં ઈઅગ ખૂણો (૯ પ્ર. પ્ર.) મોટો છે; માટે, અઅઈ ખૂણા કરતાં ઈઅગ ખૂણો પણ મોટો છે. અને ઈઅગ તથા અકઢ ખૂણા (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે, માટે, અઅઈ ખૂણા કરતાં અકઢ ખૂણો મોટો છે અને અઅઈ ખૂણો તેજ અવક ખૂણો છે માટે, અવક ખૂણા કરતાં અકઢ ખૂણો મોટો છે એ સિદ્ધ.

આ સિદ્ધતા ઉપરથી વિદ્યાર્થીઓ જોશે કે, જે ઉપન્યાસમાં વક ને બદલે અક લીટી વધારવાની કહી હોતો, તેથી થએલો બહારનો વકળ ખૂણો માંહેના અવક ખૂણા કરતાં મોટો છે એમ પણ સિદ્ધ થયું.

પ્રતિજ્ઞા ૧૭ મી પ્રમેય.

એક (વઅક) ત્રિકોણના કોઈ પણ બે (અ તથા ક અથવા વ તથા ક અથવા અ તથા વ) ખૂણાઓનો સર્વાંગો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે.

કહેલા ખૂણાઓ પૈકી કોઈ (ક) ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ (વક) બાજુને (૨ સ્ત્રી. પ્ર.) વધારો તો, અકઢ

બહારનો ખૂણો માંહેના અ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. તે બંનેમાં અકવ

ખૂણો મેળવીએ તો, અકઢ તથા અકવ ખૂણાઓનો સર્વાંગો



સર્વાળા કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટા થશે. અને અકડ તથા અકચ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, અ તથા અકચ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે.

તેજ પ્રમાણે વ તથા વકચ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થશે.

વળી, જો વ બિંદુની પાર વક ને વધારો તો, એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, વ તથા અ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થશે.

૧. એ અગત્યનું છે કે, ત્રિકોણની માંહેના જો બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે એમ બતાવવું હોય, તે ખૂણાના હરકોઈ શિરોબિંદુમાંથી બે કાટખૂણા કરનારી ગમે તે બાજુને વધારવી નોંધએ. બાકીના ત્રીજા ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી કોઈ બાજુને વધારવી નહિ.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી પ્રમેય.

કોઈ પણ (ત્રિક) ત્રિકોણમાં જો એક (અક) બાજુ બીજી (અચ) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામેનો (અચક) ખૂણો નાની બાજુની સામેના (વકચ) ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

મોટી અક બાજુમાંથી નાની અચ બાજુની બરાબર અડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને અડ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અચક ત્રિકોણની અચ તથા અડ બાજુઓ બરાબર છે તેથી (૨૫ બા. પ્ર.) તે સમકોણી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અચક તથા અડચ વ બે ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ, અડચ ખૂણો માંહેના અકચ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, અડચ ખૂણાની બરાબરનો અચક ખૂણો પણ અકચ ખૂણા કરતાં મોટો છે; અને અચક ખૂણા કરતાં અચક ખૂણો (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો છે. માટે અકચ ખૂણા કરતાં તે અચક ખૂણો ઘણોજ મોટો છે એ સિદ્ધ.



૧. મોટી બાજુમાંથી નાની બાજુ જેવડી કાપીને ઉપર પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. તેમ નાની બાજુને મોટી જેવડી વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે.

૨. બાજુ કાપવામાં કે વધારવામાં યાદ રાખવું કે, બરાબર બાજુઓ સીમાવાસી થાય તોજ સિદ્ધતા થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી પ્રમેય.

જો બે બાજુઓ બરાબર (અક) ખૂણા

કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણાની સામેની (અક) બાજુ તે, નાના ખૂણાની સામેની (અવ) બાજુ કરતાં મોટી થશે. *

કેમકે, અક બાજુ અવ થી મોટી ન હોય તો, તેની બરાબર અથવા તેનાથી ટૂંકાની હોય.

અક તથા અવ બાજુઓ બરાબર નથી. કેમકે, સારે તો, વ તથા ક ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર થાય. પણ એ, ઉપન્યાસથી જણાવે છે. વળી, અક બાજુ અવ બાજુ કરતાં નાની નથી. કેમકે, સારે તો, વ ખૂણા ક ખૂણા કરતાં (૧૮ પ્રતિ. પ્ર.) નાનો થાય. એ પણ ઉપન્યાસથી જણાવે છે.

આમ અક બાજુ અવ ની બરાબર અથવા તેનાથી નાની નથી. સારે તો મોટી છે એ સિદ્ધ. *

પ્રતિજ્ઞા ૨૦ મી પ્રમેય.

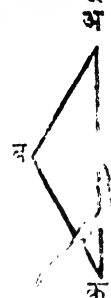
એક (વઅક) ત્રિકોણની ડાહપણુ (અવ તથા અક) એ બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી (વક) બાજુ કરતાં મોટો છે.

વઅ બાજુને (૨ સ્તી. પ્ર.) વધારો. અને અક ની બરાબર અડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ડક (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધો.

કઅડ ત્રિકોણની અડ તથા અક બાજુઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી (૨૫ વ્યા. પ્ર.) કઅડ સમદ્રી બાજુ ત્રિકોણ છે. માટે, તેના અડક તથા અકઅડ ખૂણા (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અકઅડ ખૂણા કરતાં વકઅડ ખૂણા (૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, તે, અકઅડ ખૂણાની બરાબરના અડક ખૂણા

કરતાંપણુ મોટો છે તેથી, વકઅડ ત્રિકોણમાં વકઅડ બાજુ વકઅડ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટી છે. પણ વક એ અવ તથા અડ ના સરવાળા બરાબર છે. અને અડ ને અક ની બરાબર રાખેલી છે. તેથી, અવ તથા અક ના સરવાળા બરાબર વક છે; માટે, અવ તથા અક નો સરવાળો વક કરતાં મોટો છે.

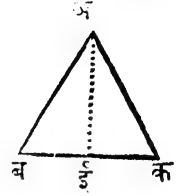
૧. ઉપર પ્રમાણે એક ત્રિકોણની ગમે તે બાજુઓનો સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં મોટો થશે.



૨. પણ, જે બે બાજુઓનો સર્વાંગો મોટો કરવો હોય, તે બે બાજુઓ ને બિંદુમાં એકઠી મળે તે બિંદુથી બેમાંથી એકને ખીજતા જોડવાની વધારવી જોઈએ.

(ખીજ રીતે) વચક ખૂણાને (૯ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. પછી અ તથા ઈ

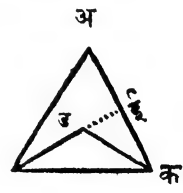
બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વર્ડઅ ખૂણો ઈઅક ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે; અને અ ખૂણાના ઈઅક તથા ઈઅબ ભાગો (આદ્ય. રચ. પ્ર.) બરાબર છે, તેથી એવું નીકળે છે કે, ઈ આગળનો પ્રત્યેક ખૂણો અ ખૂણાના ભાગો માંહેલા પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મોટો છે. અને તેથી (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) એવું નીકળે છે કે, વચ બાજુ વર્ડ કરતાં અને અક બાજુ કર્ડ કરતાં મોટી છે. એમાટે, અવ તથા અક બાજુઓનો સર્વાંગો વર્ડ તથા કર્ડ ના સર્વાંગો કરતાં મોટો છે. અને વર્ડ તથા કર્ડ ના સર્વાંગો બરાબર વચ છે. માટે, અવ તથા અક બાજુઓનો સર્વાંગો વચ બાજુ કરતાં મોટો છે એ સિદ્ધ.



પ્રતિજ્ઞા ૨૧ મી પ્રમેય.

‘કોઈ (વચક) ત્રિકોણની માંહે એક (ક) બિંદુ સુધી કોઈ પણ (વચ) બાજુના છેડાઓથી દોરેલી (વડ તથા કડ) સીધી લીટીઓનો સર્વાંગોત્રિકોણની બાકીની (અવ તથા અક) બે બાજુઓના સર્વાંગો કરતાં ઓછો છે (૧ બા.); પણ તે લીટીઓની વચ્ચેનો (ક) ખૂણો બાજુઓની વચ્ચેના (અ) ખૂણા કરતાં મોટો છે (૨ બા.).

વડ ને ઈ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને વચર્ડ ત્રિકોણ લો તો, અવ તથા અર્ડ બાજુઓનો સર્વાંગો (૨૦ પ્રતિ. પ્ર.) ત્રીજી વર્ડ બાજુ કરતાં મોટો છે. એ પ્રત્યેકમાં ઈ ક મેળવે એટલે, અવ અને અક (અર્ડ+ઈક) બાજુઓનો સર્વાંગો વર્ડ તથા ઈક બાજુઓના સર્વાંગો કરતાં (૪ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટો થશે.



૩. જર્ડક ત્રિકોણ લો તો, ડર્ડ તથા ઈર્ડ બાજુઓનો સર્વાંગો ત્રીજી વચ મેળવે. એટલે,

बई (बड+ई) तथा ईक ना सर्वाणो बड तथा डक ना सर्वाणो करतां
(४ प्रत्य. प्र.) भोटो यशे.

અવ તથા અક નો સર્વાળો વડે તથા ફક્ત ના સર્વાળા કરતાં મોટો છે; અને વડે તથા ફક્ત નો સર્વાળો વડ તથા ઢક ના સર્વાળા કરતાં મોટો છે. એમ સિદ્ધ કર્યું છે. સારે, અવ તથા અક નો સર્વાળો વડ તથા ઢક નો સર્વાળા કરતાં તે ઘણો જ મોટો થશે. એટલે, અવ તથા અક ના સર્વાળા કરતાં વડ તથા કડ નો સર્વાળો ઓછો છે. (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

ડર્ફક ત્રિકોણની બહારનો વડક ખૂણો માંહેના ડર્ફક ખૂણા કરતાં
 (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે; અને વર્ગ ત્રિકોણની બહારનો ડર્ફક ખૂણો
 માંહેના અ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. માટે, અ ખૂણા કરતાં
 તે ડ ખૂણો ઘણોજ મોટો છે. એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

प्रतिज्ञा २२ भी कृत्य.

કોઈ (અ, વ, ક) ત્રણ સીધી લીટીઓ આપેલી છે, એવી કે, તેઓ માંહેલી કોઈપણ બેનો સર્વાંગો ત્રીજી કરતાં મોટો છે તો, જેની બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી લીટીઓની બરાબર થાય, એવા એક ત્રિ:કોણ કરવાનું.

साधन.

કોઈપણ ૬ બિંદુથી આપેલી લીટીઓમાંની ૫ ની બરાબર
 ૬૬ લીટી (૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી ૫ _____
 આપેલી લીટીઓમાંથી બીજી ૫ ની બરાબર ૬૬ _____

(૨ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને રૂબિંદુથી ક ની બરાબર ક

(२ प्रति. प्र.) ईक दोरो. वणा, ड मध्य

ખિંદુથી ડગ ત્રિજ્યાએ (૩ સ્ત્રી. પ્ર.)

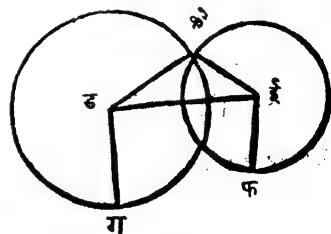
એકજોળ કરો. અને $\frac{1}{2}$ મધ્ય બિંદુથી

૬૬૬ ત્રિજ્યાએ બીજો ગોળ પણ (૩)

સ્વી. પ્ર.) કરો. અને આ ગ્રાજાના કે

છેદન બિંદુથી કેન્દ્ર તથા કેઈ (૧ સ્વી. પ્ર.) માં

ਭਾਗੇਡ ਧਰ



સિદ્ધતા.

ઢકેઈ ત્રિકોણની ઢકેઈ બાજુ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) અ ની બરાબર રાખેલી છે. ઢકે અને ઢગ એકજ મોટા ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે તેથી, (૧૫ બા. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે. ઢગ, વ ની બરાબર રાખેલી છે એટલે, ઢકે (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) વ ની બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે કેઈ તથા ફેઈ નાના ગોળની ત્રિજ્યાઓ છે; તેથી, તે બંને (૧૫ બા. પ્ર.) બરાબર છે. અને ફેઈ, ક ની બરાબર રાખેલી છે. એટલે, ક લીટી (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કેઈ ની બરાબર છે. તેથી, ઢકેઈ ત્રિકોણની ઢકેઈ, ઢકે તથા કેઈ બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી અ, વ તથા ક સીધી લીટીઓની બરાબર છે. એટલે કરવાનો ત્રિકોણ ઢકેઈ થયો એ સિદ્ધ.

૧. ત્રણ લીટીઓમાંથી કોઈ એક લીટીના દરેક છેડા બિંદુથી બાકીની બે લીટીઓ બરાબર લીટીઓ દોરવી. અને પછી સંધાએલા છેડાઓને મધ્યબિંદુ ખારી બાકીની લીટીઓ જોડેલી ત્રિજ્યાએ ગોળો દોરવા. એ અવશ્યનું છે.

૨. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં મોટો હોય તોજ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકે. (૨૦ મી પ્રતિજ્ઞા જુઓ.) અને એમ હોય તોજ બે ગોળો એક બીજાને છેદે. બે ગોળો છેદાવાજ જોઈએ, એ, આ પ્રતિજ્ઞામાં અવશ્યનું છે.

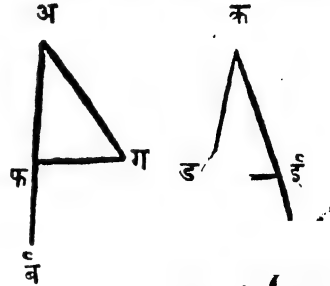
૩. બે લીટીઓનો સર્વાળો ત્રીજીની બરાબર હોય તો, બંને ગોળો પરિધ એક બીજાને સ્પર્શ કરશે; પણ, છેદાશે નહિ; તેમ બે બાજુનો સર્વાળો ત્રીજી કરતાં નાનો હોય તો ગોળો પરિધ ન છેદાનાં જૂદા જૂદા ગોળ થાય; અને તેથી આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૪. ત્રણ લીટીઓ બરાબર હોય તો, આ પ્રતિજ્ઞા પાડેલી પ્રતિજ્ઞા જેવીજ થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૩ મી કૃત્ય.

— નાની બીટીમાં આપેલા (અ) બિંદુથી એક

આપેલા ખૂણાની બાજુઓમાં કાઢપણુ ડ તથા ઈ બિંદુઓ લેા. અને ડઈ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને ડકઈ ત્રિકોણની સાથે સમબાજુ (કડ, અક ની કઈ, અગ ની" અને ડઈ, ફગ ની બરાબર) થાય એવો એક કમગ ત્રિકોણ (૨૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. એટલે કમગ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ



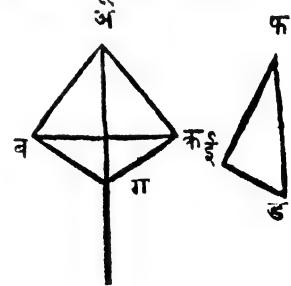
અનુક્રમે ડકઈ ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર છે. તેથી ડઈ તથા કમગ બરાબર બાજુની સામેના ડકઈ તથા કમગ ખૂણા (૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. બાવીશમી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે ત્રિકોણ કરતી વખતે ધ્યાનમાં રાખવું કે, જે બિંદુથી ખૂણો કરવો હોય, તે બિંદુ ઉપર આપેલા ખૂણાનું શિરો-બિંદુ આવે એવી રીતે ત્રિકોણ કરવો જોઈએ.

પ્રતિજ્ઞા ૨૪ મી પ્રમેય.

જો, (વચક તથા ઈફડ) બે ત્રિકોણોમાં એકની (અવ તથા અક) બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની (ફઈ તથા ફડ) બે બાજુઓની બરાબર હોય (એટલે, અવ, ફઈ ની તથા અક, ફડ ની) અને બરાબર બાજુઓથી થયેલા ખૂણાઓમાંથી એક (વચક) ખૂણો બીજા (ઈફડ) ખૂણા કરતાં મોટો હોય તો, મોટા ખૂણા સામેની (વક) બાજુ નાના ખૂણા સામેની (ઈડ) બાજુ કરતાં મોટી થશે.

અવ બાજુના અ બિંદુથી તે બાજુ સાથે ઈફડ ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) વચક ખૂણો કરો. અને ફડ ની બરાબર (૩ પ્રતિ. પ્ર.) અગ કાપો. અને વગ તથા કગ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



વચક તથા ઈફડ ત્રિકોણોમાં અવ તથા અગ બાજુઓ અનુક્રમે ફઈ તથા ફડ બાજુઓની બરાબર છે, અને અંતર

૨૪. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વગ તથા ફડ પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે.

અગ (આકૃ. ૨૪. પ્ર.) ફડ ની બરાબર છે. અને અક તથા ફડ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેથી અગ તથા અક બાબુઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર. માટે, ગઅક ત્રિકોણ (૨૫ વ્યા. પ્ર.) સમઘી બાબુ ત્રિકોણ છે તેથી તેના અકગ તથા અગક ખૂણાઓ (૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; પણ વકગ ખૂણા કરતાં અકગ ખૂણા (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટા છે. અને અકગ તથા અગક ખૂણા બરાબર છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું. માટે, વકગ ખૂણા કરતાં અગક ખૂણા પણ મોટા છે. અને અગક ખૂણા કરતાં વગક ખૂણા (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટા છે; માટે વકગ ખૂણા કરતાં વગક ખૂણા તો ઘણું મોટા છે.

હવે, વગક ત્રિકોણ લેખએ તો, તેનો વગક ખૂણો વકગ ખૂણા કરતાં મોટા છે એમ ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે તેથી તેની સામેની વક બાબુ વગ બાબુ કરતાં (૧૯ પ્રતિ. પ્ર.) મોટી છે. અને વગ, ફડ ની બરાબર છે. તેથી ફડ કરતાં વક બાબુ મોટી થઈ એ સિદ્ધ.

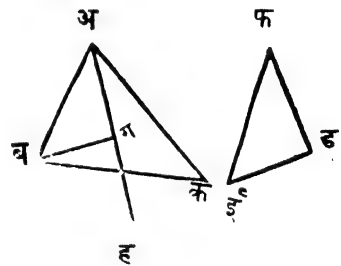
(બીજી રીતે) કદાચ જો ગ બિંદુ વક પાયાથી ઉંચે પડે તો ધારોકે, તે ગ આગળ પડે છે. વગ (૧ સ્વી.

પ્ર.) સાંધો. હવે વઅગ તથા ફડ ત્રિકોણોના વગ તથા ફડ પાયા (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને અગ તથા વગ લીટીઓનો સર્વાળો અક તથા વક ના સર્વાળા કરતાં (૨૧ પ્રતિ. પ્ર.) ઓછા છે. એ અને વિષમ સર્વાળામાંથી

અગ તથા અક બરાબર લીટીઓ બાદ કરો તો વગ, વક કરતાં (૫ પ્રત્ય. પ્ર.) નાની રહેશે. એટલે, વગ કરતાં વક મોટી છે. અને વગ તથા ફડ બરાબર છે તેથી ફડ કરતાં પણ વક મોટી છે એ સિદ્ધ.

(ત્રીજી રીતે) જો, ગ બિંદુ વક પાયામાં પડે તો, વક બાબુ વગ કરતાં (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) મોટી છે.

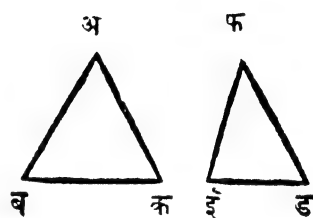
તેથી ૨૫ મી પ્રમેય.



તુકમે ખીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય (બઝ, ફર્ફની તથા અક, ફડ ની) અને ત્રીજી બાજુ (વક) ખીજની ત્રીજી બાજુ (ફડ) કરતાં મોટી હોયતો; મોટી બાજુની સામે નો વઝક ખૂણો નાની બાજુની સામેના (ફર્ફ) ખૂણા કરતાં મોટો થશે.*

જો, અ ખૂણો ફ ખૂણા કરતાં મોટો ન હોય તો, તેની બરાબર હોય અથવા નાનો હોય.

બને ખૂણા બરાબર નથી. કેમકે, જો એમ હોય તો, વક બાજુ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) ફર્ફ બાજુની બરાબર થાય. પણ એ ઉપન્યાસથી ઊલટું છે.



તેમ, વઝક ખૂણો ફર્ફ ખૂણા કરતાં નાનો નથી; કેમકે, એમ હોય તો, વક બાજુ (૨૪ પ્રતિ. પ્ર.) ફર્ફ બાજુથી નાની થાય. એ પણ ઉપન્યાસથી ઊલટું છે.

બ્યારે, અ ખૂણો ક ખૂણાની બરાબર અથવા તેનાથી નાનો નથી; સારેતો, મોટો થવોજ જોઈએ એ સિદ્ધ.+

પ્રતિજ્ઞા ૨૬ મી પ્રમેય.

જો, (વઝક તથા ફર્ફ) બે ત્રિકોણોમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે ખીજના બે ખૂણાઓ (વ, ડ ની ક, ફ) ની બરાબર હોય; અને એક ત્રિકોણની ત્રણમાંની ગમે તે એક બાજુ તેની સરૂપ** સ્થિતિમાં રહેલી ખીજ ત્રિકોણની એક બાજુની બરાબર હોય તો; બાકીની બાજુઓ તથા ખૂણાઓ અનુક્રમે એક ખીજની બરાબર થશે.

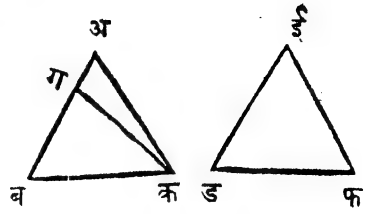
(પહેલી રીતે) ધારો કે, બરાબર ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી વક તથા ડફ બાજુઓ બરાબર છે; સારે, વઝ બાજુ પણ ફર્ફ બાજુની બરાબર

* ચોવીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. + ઊલટી સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરી છે.

** એક જેવી સ્થિતિમાં અથવા એક જેવી સ્થિતિમાં નથી. સ્થિતિ કે સ્થિતિ. ખીજની બે બાજુઓ બરાબર હોય તો, તેની બરાબર હોય અથવા નાનો હોય.

છે. કેમકે, જો તે બંને બરાબર ન હોય તો, તેમાંની એક મોટી હોય.

બની શકે તો ધારો કે, બઅ બાબુ ડર્ફ કરતાં મોટી છે. સારે, ડર્ફની બરાબરવગ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને ગક (૧ સ્ત્રી પ્ર.) સાંધો.



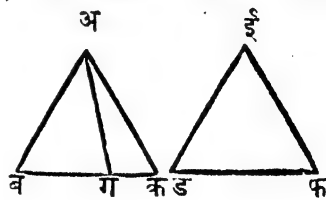
ગવક તથા ડર્ફ ત્રિકોણોમાં વગ તથા ડર્ફ બાબુઓ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) બરાબર છે. અને વક તથા ડફ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ વ ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, વકગ તથા ડકર્ફ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ વકઅ ખૂણો (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડકર્ફ ખૂણાની બરાબર છે. એટલે, વકગ તથા વકઅ ખૂણાઓ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા; એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, બઅ બાબુ ડર્ફ બાબુ કરતાં મોટી નથી; તેમ નાની પણ નહિ થાય તેથી તે બંને બરાબર છે. અને વક તથા ડક બાબુઓ અને વ તથા ડ ખૂણાઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક બાબુ ડર્ફની અને અ ખૂણો ડર્ફ ખૂણાની બરાબર છે.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં બાકીની બાબુઓ તથા ખૂણા બરાબર કરીને રહેવા દીધું છે પણ પછી ચોથી પ્રતિજ્ઞાની સહાયથી બંને ત્રિકોણો એક રૂપ થાય.

(બીજી રીતે) ધારો કે, ક તથા ફ બરાબર ખૂણાઓની સામેની અવ તથા ડર્ફ બાબુઓ બરાબર છે; સારે, વક તથા ડફ બાબુઓ પણ બરાબર થશે.

કેમકે, જો બની શકે તો ધારો કે, તેઓ માંહેલી એક વક બાબુ બીજી ડફ કરતાં મોટી છે. એટલે,

ડફ ની બરાબર વગ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને અગ (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો.



અવગ તથા ડર્ફ ત્રિકોણોમાં અવ

બંને ત્રિકોણો એકરૂપ કરવાને વારતે છે. આગળ ચોથી

તથા વગ બાળુઓ (આદ્ય. રચ. પ્ર.) અનુક્રમે ઈંડ તથા ડફ બાળુઓની બરાબર છે. અને વ ખૂણો (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે અગવ તથા ઈંફડ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; અને ક ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ. પ્ર.) ઈંફડ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, અગવ તથા ક ખૂણા (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા, પણ (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) એ, અસંભવિત છે. માટે, વક તથા ડફ બાળુઓ માંહેલી કાષ્ઠપણ એક, બીજી કરતાં મોટી નથી. અને તેથી તેઓ બરાબર છે.

વક તથા ડફ બાળુઓ બરાબર છે, અને અવ બાળુ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડઈ બાળુની બરાબર છે, તેમજ વ ખૂણો પણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) ડ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) અક બાળુ ઈંફ બાળુની અને અ ખૂણો ઈં ખૂણાની બરાબર છે.

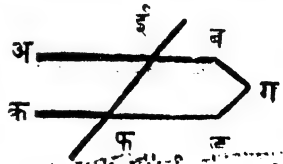
૧. ગમે તે બે ખૂણા અને તેના સંબંધની ગમે તે એક બાળુ લેઈ આ પ્રતિજ્ઞા ઘણી રીતે સિદ્ધ કરી શકાય.

૨. ઉપર બંને રીતોમાં મોટી બાળુમાંથી નાની બાળુના જેવડી કાપીને પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી છે. પણ નાની બાળુને મોટીના જેવડી (૩ જ પ્રતિજ્ઞા નીચેની બીજી કલમ મુજબ) વધારીને પણ આ પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ કરી શકાય.

પ્રતિજ્ઞા ૨૭ મી પ્રમેય.

જો, (ઈંફ) એક સીધી લીટી, (અવ તથા કડ) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી (અઈંફ તથા ઈંફડ) વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક એકની બરાબર થાય તો; આ બંને સીધી લીટીઓ સમાંતર થશે.

કેમકે, જો બની શકે તો, ધારો કે, તે લીટીઓ સમાંતર નથી. સારે, તેમના વ તથા ડ છેડાની પાર વધારતાં તેઓ ગ આગળ મળેછે. તેથી, ઈંફગ ત્રિકાણનો અઈંફ બહારનો ખૂણો માંહેના ઈંફગ ખૂણા કરતાં (૧૬ પ્રતિ. પ્ર.) મોટો છે. પણ ઉપન્યાસ પ્ર. તે બંને બરાબર છે. એ, અસંભવિત છે. એ માટે, અવ તથા કડ ને



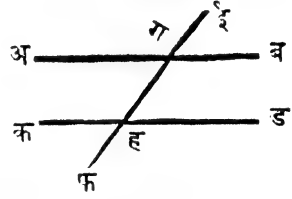
તેના વ તથા ડ છેડાની પાર વધારતાં તેઓ ગ આગળ મળેછે.

એવું પણ સિદ્ધ થઈ શકશે કે, તેઓને અંક છોડાની પાર વધારતાં પણ મળતી નથી. માટે, જ્યારે એ સીધી લીટીઓ કાઢપણુ એક તરફ વધારતાં મળતી નથી ત્યારે, (૩૫ વ્યા. પ્ર.) તેઓ સમાંતર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૨૮ મી પ્રમેય.

જો, (ઈગ) એક સીધી લીટી, (અવ તથા કઢ) બે સીધી લીટીઓને છેદે; અને તેથી બહારનો (ઈગઅ) ખૂણો, લીટીની એકજ તરફના માંહેના અને સામેના (ગન્ક) ખૂણાની બરાબર હોય (૧ વ્યા.); અથવા એકજ તરફના માંહેના (અગહ તથા કહગ) ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થાય (૨ વ્યા.); તો એ બે સીધી લીટીઓ અરસપરસ સમાંતર થશે.

ધારો કે, ઈગઅ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર છે. અને ઈગઅ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) વગર ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ગહક તથા વગહ ખૂણાઓ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, અવ તથા



કઢ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. (જો, ઈગઅ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેન પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

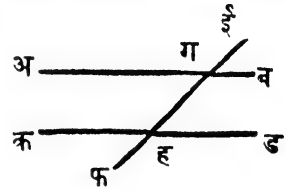
(ખીજી વ્યાખત.) ધારો કે, અગહ તથા કહગ ખૂણાઓનો સર્વાળો (ઉપન્યાસ પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને ગહક તથા ગહક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણાની બરાબર છે. માટે, અગહ તથા કહગ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૧ પ્રસ. પ્ર.) ગહક તથા કહગ ખૂણાઓના સર્વાળો બરાબર છે. એમાંથી કહગ ખૂણો જે એ બંનેમાં સામાન્ય (સાધારણ) રહેલો છે તે બાદ કરો. એટલે, બાકીનો અગહ ખૂણો (૩ પ્રસ. પ્ર.) ગહક ખૂણાની બરાબર રહેશે. પણ તેઓ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ છે માટે, અવ તથા કઢ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. (જો વગહ તથા ઢહગ ખૂણાઓ બરાબર કહેલા હોત, તોપણ ઉપર પ્રમાણેન પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકત.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૯ મી પ્રમેય.

જો, સીધી (અવ તથા કઢ) બે સમાંતર સીધી

બરાબર થાયછે. (પહેલી બા.); અને બહારનો (ઈગઅ) ખૂણો એકજ તરફના માંહેના અને સામેના (ગહક) ખૂણાની બરાબર થાયછે. (૨ બા.); અને એકજ તરફના માંહેના (અગહ તથા કહગ) બે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થાયછે (ત્રીજી બા.)*

જો, અગહ તથા ગહક બંને વ્યુત્ક્રમ ખૂણા બરાબર ન હોય તો ધારે કે, તેઓ માંહેનો એક અગહ બીજા ગહક ખૂણા કરતાં મોટો છે. એ બંને વિપક્ષ પરિમિતોની સાથે વગહ ખૂણો મેળવ્યો તો, અગહ તથા વગહ ખૂણાઓનો સર્વાળો, વગહ તથા ગહક ખૂણાના સર્વાળો કરતાં (૪ પ્રલ. પ્ર.) મોટો થશે.



પણ અગહ તથા વગહ ખૂણાઓનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, વગહ તથા ગહક ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે. અને તેથી અવ તથા કહ લીટીઓ વધારીશું તો, તેઓ (૧૨ પ્રલ. પ્ર.) વડ તરફ મળશે. પણ, (ઉપન્યાસ પ્ર.) તેઓ સમાંતર છે. તેથી, મળી શકતી નથી. એ, અસંભવિત છે. માટે અગહ તથા ગહક ખૂણાઓ માંહેલો કોઈપણ એક બીજા કરતાં મોટો નથી. ભારે, તેઓ બરાબર છેજ. (એજ પ્રમાણે વગહ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

(બીજી બા.) બહારનો ઈગઅ ખૂણો માંહેના ગહક ખૂણાની બરાબર છે. કેમકે, ઈગઅ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) વગહ ખૂણાની બરાબર છે. અને વગહ ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની પહેલી બા. પ્ર.) ગહક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાની બરાબર છે. માટે, ઈગઅ તથા ગહક ખૂણા (૧ પ્રલ. પ્ર.) બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે ઈગવ તથા ગહક ખૂણાઓ બરાબર છે એવું સિદ્ધ થઈ શકે.)

(ત્રીજી બા.) એકજ તરફના અગહ તથા કહગ માંહેના ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. કેમકે, ઈગઅ* તથા ગહક ખૂણાઓ

* ૨૭ તથા ૨૮ મી પ્રતિજ્ઞાનો ઉલ્લેખ પક્ષ છે.

* આ ખૂણાને બદલે વગહ લેખએ તો (આ પ્રતિજ્ઞાની ૨૭ તથા ૨૮ મી પ્રતિજ્ઞાનો ઉલ્લેખ પક્ષ છે.) તેની બરાબરનો ગહક ખૂણો

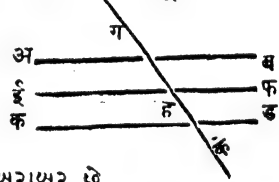
(આ પ્રતિજ્ઞાની બીજી બા. પ્ર.) બરાબર છે. અને તે બંનેની સાથે જો અગ્રહ ખૂણો મેળવ્યો તો, ર્ગઅ તથા અગ્રહ ખૂણાનો સર્વાળો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) અગ્રહ તથા ગ્રહક ખૂણાના સર્વાળો બરાબર થશે. અને ર્ગઅ તથા અગ્રહ ખૂણાનો સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. તેથી, અગ્રહ તથા ગ્રહક ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. (એજ પ્રમાણે વગર તથા ગ્રહક ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે એમ સિદ્ધ થઈ શકે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી પ્રમેય.

જો, (અવ તથા કઢ) બે સીધી લીટીઓ (ઈફ) એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાંતર હોય તો; તેઓ અસ્પર્શ સમાંતર થશે.

ધારો કે, ગકે સીધી લીટી તેઓને છેદે છે. તેથી અગ્રહ ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. ૧ બા. પ્ર.) ગ્રહક ખૂણાની બરાબર છે.

તેમજ હકેડ ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિની ૨ બા. પ્ર.) ગ્રહક ખૂણાની બરાબર છે. માટે, અગ્રહ



ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) હકેડ (ગકેડ) ખૂણાની બરાબર છે.

હવે, અવ તથા કઢ સીધી લીટીઓને ગકે સીધી લીટી છેદે છે; અને તેથી થયેલા અગ્રહ તથા ગ્રહક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરાબર છે તેથી અવ તથા કઢ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે.

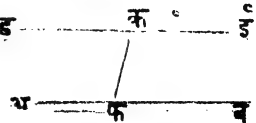
૧. જો ર્ગઅ લીટીની સાથે બે લીટીઓ સમાંતર છે તે ર્ગઅ લીટી વચ્ચે ન આપતાં ગમે તે એક તરફ આપી હોય, તોપણ સિદ્ધતા થઈ શકે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૧ મી કૃત્ય.

એક આપેલા (ક) બિંદુનીપાર એક આપેલી (અવ) સીધી લીટીને સમાંતર એક સીધી લીટી દોરવાનું.

સાધન.

અવ સીધી લીટીમાં કોઈપણ ક બિંદુ લો. અને કક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. અને ક બિંદુ આગળ અને કક સીધી



પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને ફર્ડ ને હ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો એટલે, ફર્ડ લીટી અથવા લીટીને સમાંતર થશે.

સિદ્ધતા.

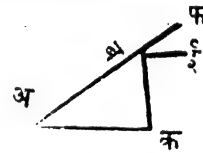
કેમકે, ફર્ડ લીટી ફર્ડ તથા અથવા લીટીઓને છેદેછે, અને તેથી થયેલા ફર્ડ તથા અર્ધક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (આકૃ. ૨૨. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, અથવા તથા ફર્ડ લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે.

૧. સાધનમાં ૨૩ પ્રતિ. પ્ર. ખૂણો રાખવાનો છે તે વ્યુત્ક્રમ રાખવો જોઈએ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી પ્રમેય.

કોઈ (અથવા) ત્રિકોણની કોઈ પણ (અથવા) બાજુને વધારી તો, બહારનો ફર્ડ ખૂણો, માંહેના અને સામેના (અ તથા ક) બે ખૂણાઓના સર્વાળા બરાબર થશે (૧ બા.); અને હરેક ત્રિકોણના માંહેના ત્રણ ખૂણાઓને સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર થશે (૨ બા.).

વનીપાર અર્ધ ને સમાંતર ફર્ડ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, ફર્ડ ખૂણો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) માંહેના અર્ધ ખૂણાની બરાબર છે. અને ફર્ડ ખૂણો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) વ્યુત્ક્રમ અર્ધ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી ફર્ડ તથા ફર્ડ ખૂણાઓના સર્વાળો (૨ પ્રતિ. પ્ર.) અ તથા ક ખૂણાઓના સર્વાળો બરાબર છે. અને ફર્ડ તથા



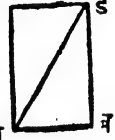
ફર્ડ ખૂણાના સર્વાળો બરાબર આખો ફર્ડ ખૂણો છે. માટે, બહારનો ફર્ડ ખૂણો માંહેના અ તથા ક બે ખૂણાઓના સર્વાળો બરાબર છે (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

ફર્ડ ખૂણો (આ પ્રતિજ્ઞાની ઉપલી ૧ બા. પ્ર.) અ તથા ક ખૂણાના સર્વાળો બરાબર છે. તે બંને બરાબર પરિમિતોમાં અર્ધ ખૂણો મેળવીએ તો, ફર્ડ તથા અર્ધ ખૂણાઓના સર્વાળો (૨ પ્રતિ. પ્ર.) અ તથા ક તથા અર્ધ ખૂણાઓના સર્વાળો બરાબર છે પણ, ફર્ડ તથા અર્ધ ખૂણાઓના સર્વાળો (૧૩ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, અ તથા ક તથા અર્ધ ખૂણાઓના સર્વાળો પણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. એ (૨ બા.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૩ મી પ્રમેય.

કાઈ(અથ તથા કડ)એ સમાન અને સમાંતર સીધી લીટીઓના પાસ પાસેના (અ તથા ક અને વ તથા ડ) છેડાઓને સાંધનારી (અક તથા વડ) સીધી લીટીઓ પણ જાતે સમાન (૧ બા.); અને સમાંતર (૨ બા.) થશે.

અ તથા ડ બિંદુઓને (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધા. કડઅ તથા વઅડ ત્રિકોણોમાં કડ તથા અવ બાજુઓ (ઉપન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને અડ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે. અને કડઅ તથા વઅડ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, અક તથા વડ પાયા અને કઅડ તથા અ વઅડ ખૂણાઓ (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)



હવે, અડ સીધી લીટી અક તથા વડ સીધી લીટીઓને છેદે છે, અને વ્યુત્ક્રમ (કઅડ તથા વઅડ) ખૂણાઓ બરાબર કરે છે. માટે, અક તથા વડ સીધી લીટીઓ (૨૭ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે એ (૨ બા.) સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૩૪ મી પ્રમેય.

એક (અડ) સમાંતર બાજુ યોખૂણુની (અથ તથા કડ અને અક તથા વડ) સામસામેની બાજુઓ અરસ્પરસ બરાબર છે (૧ બા.); તેમજ (અ તથા ડ અને ક તથા વ) સામસામેના ખૂણાઓ પણ બરાબર છે (૨ બા.); અને સમાંતર બાજુ યોખૂણુ જાતે તેની (અડ) કર્ણ લીટીથી દુભંગાએલો છે (૩ બા.).

કડ તથા અવ સમાંતર સીધી લીટીઓને અડ છેદે છે. તેથી, અડઅ તથા ડઅવ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ કઅ તથા ડઅ સીધી લીટીઓને અડ લીટી છેદે છે. તેથી, અડઅ તથા ડઅક વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ પણ



(૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, અકડ તથા ડઅવ ત્રિકોણોમાં કડઅ તથા ડઅક ખૂણાઓ અનુક્રમે ડઅવ ત્રિકોણના ડઅવ તથા અડઅ ખૂણાની બરાબર છે. અને અડ બાજુ બંને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય છે તેથી (૨૬ પ્રતિ. પ્ર.) કડ બાજુ અવ બાજુની અને અક તે વડ બાજુની બરાબર છે એ (૧ બા. સિદ્ધ થઈ.)

અને અક અને ડઅવ તથા કઅવ

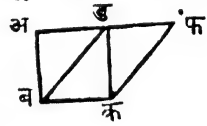
ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને કઢવ તથા ઢબં ખૂણાઓનો સર્વાળો પણ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. એ બંનેમાંથી અનુક્રમે ક તથા વ બરાબર ખૂણાઓ બાદ કર્યાં તો બાકીના કઢવ તથા કઢવ ખૂણા (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર રહેશે. (અગર અઢક તથા ઢબં બરાબર ખૂણાઓમાં અઢવ તથા ઢબં બરાબર ખૂણાઓ ઉમેર્યાં તો આખા કઢવ તથા કઢવ ખૂણા (૨ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર થશે. ૨ બા. સિદ્ધ થઈ.)

હવે, કઢવ તથા ઢબં ત્રિકોણોમાં કઢ બાળુ (આ પ્રતિસાની પહેલી બા. પ્ર.) અંત્ર બાળુની બરાબર છે; અઢ બાળુ બંનેમાં સાધારણ છે; અને કઢવ ખૂણા (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) ઢબં ખૂણાની બરાબર છે માટે, (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે. એટલે, અઢ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુના તેની અઢ કર્ણ લીટીથી કઢવ તથા ઢબં બે ત્રિકોણો થયેલા છે તે બંને બરાબર થયા. એટલે, અઢ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ તેની અઢ કર્ણ લીટીથી દુભગાયો (એ ત્રીજી બા. સિદ્ધ થઈ).

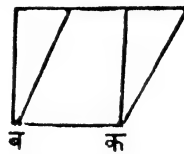
પ્રતિજ્ઞા ૩૫ મી પ્રમેય.

એકજ (વક) પાયા ઉપરના તથા એકજ (વક તથા અક) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (વઢ તથા વક) સમાંતર બાળુ ચોખ્ખું* બરાબર છે.

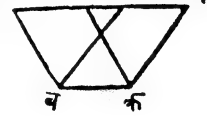
(પહેલી રીતે) કમક, વઢ સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ તેની વઢ કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાયેલો છે. એટલે, તે વઢક ત્રિકોણથી બમણો છે. તેજ પ્રમાણે વક સમાંતર બાળુ ચોખ્ખુ પણ તેની વક કર્ણ લીટીથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભગાયેલો છે. એટલે, તે પણ વઢક ત્રિકોણથી બમણો છે. તેથી, વઢ તથા વક સમાંતર બાળુ ચોખ્ખું (૬ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.



(બીજી રીતે) અથવા આ સાથેની આકૃતિઓ પ્રમાણે ચોખ્ખું હોય તો વઢક તથા કઢક ખૂણાઓ અને વઢં તથા કઢક ખૂણાઓ (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને અ ઈ ઢ વ અ ઢ ઈ વ અવ તથા ઢક બાળુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. માટે, (૨૬ પ્રતિ. ની બીજી



(૧ આકૃતિ.)



(૨ આકૃતિ.)

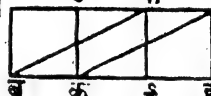
*અને એજ ચોખ્ખું લેઈ બતાવ્યા છે પણ ગમે તેવા રેખા જે...

રીત પ્ર.) વચ્ચે તથા કઢફ ત્રિકોણો બરાબર છે; હવે, વચ્ચે ત્રાપીજ્ય. મમાંથી વચ્ચે ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો, બાકી વચ્ચે સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ અને વચ્ચે ત્રાપીજ્યમમાંથી કઢફ ત્રિકોણ બાદ કરીએ તો બાકી વચ્ચે સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ રહેશે તેઓ બંને (૩ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર રહેશે* (બંને આકૃતિઓમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.)

પ્રતિજ્ઞા ૩૬ મી પ્રમેય.

બરાબર (વચ્ચે તથા વચ્ચે) પાયા ઉપરના અને વચ્ચે (વચ્ચે તથા અગ) સમાંતર સીધી લીટીઓની વચ્ચેના (વચ્ચે તથા વચ્ચે) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ બરાબર છે.

વચ્ચે તથા અગ (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધો. વચ્ચે તથા વચ્ચે લીટીઓ (ઉપ-ન્યાસ પ્ર.) બરાબર છે. અને વચ્ચે તથા અગ અ



(૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વચ્ચે તથા અગ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. અને તેઓ (ઉપ-ન્યાસ પ્ર.) સમાંતર પણ છે. માટે, તેઓના છેડાને સાંધનારી વચ્ચે તથા અગ લીટીઓ પણ (૩૩ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે એટલે, વચ્ચે (૨૯ અગ. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ થયો. માટે, વચ્ચે વચ્ચે પાયા ઉપરના અને વચ્ચે તથા અગ વચ્ચે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના વચ્ચે તથા વચ્ચે સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેજ પ્રમાણે અગ પાયા ઉપરના અને વચ્ચે લીટી વચ્ચેના વચ્ચે તથા વચ્ચે એ બંને ચોખૂણુ પણ (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, વચ્ચે તથા વચ્ચે સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે એ સિદ્ધ.

* ઉપરની સિદ્ધતામાં અગ તથા વચ્ચે બાજુ ભેવાને બદલે અગ તથા વચ્ચે ભેદને (૨૬ પ્રતિ. ની ૧ બા. પ્ર.) વચ્ચે તથા કઢફ ત્રિકોણો બરાબર થઈ શકે. કેમકે, અગ તથા વચ્ચે બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ વચ્ચે અને વચ્ચે બાજુઓ પણ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે તેથી અગ તથા વચ્ચે બાજુઓ (૧ પ્રસ. પ્ર.) બરાબર છે. તેમાંથી વચ્ચે બાદ કરવાથી (ત્રીજા પ્રસ. પ્ર.) અગ તથા વચ્ચે બાજુઓ બરાબર રહેશે. (૧ લી આકૃતિ બાજુઓ.)

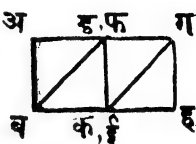
અને અગ તથા વચ્ચે માં વચ્ચે મેળવવાથી અગ તથા વચ્ચે (૨ પ્રસ.

આકૃતિ બાજુઓ.)

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં એવું ધારી લીધેલું છે કે, બરાબર પાયાઓને એકબીજીની લીટીમાં મૂકેલા છે. જો, એ પ્રમાણે ન હોય તો પ્રતિજ્ઞા સિદ્ધ થઈ શકશે નહિ.

૨. સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનાં જ એ બિંદુઓ સાંધવાનાં છે. તેઓ ફરેક ચોખ્ખાની એકબીજી તરફનાં અને વ્યુત્ક્રમ જોઈએ.

(ખીજી રીતે) સરખા પાયા જોડાજોડ લેવાથી અ પાસેની આકૃતિમાં ઉપરની સિદ્ધતા લાગુ થશે.

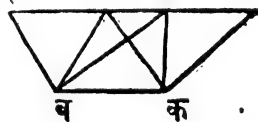


પ્રતિજ્ઞા ૩૭ મી પ્રમેય.

એકબીજી (બક) પાયા ઉપરના અને એકબીજી (બક તથા અડ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (બઅક તથા બડક) ત્રિકોણો બરાબર* છે.

કઅ ને સમાંતર બ બિંદુની પાર વડે અને બડ ને સમાંતર પણ કબિંદુમાંથી કફ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. ફ અ ડ ફ

અને વડે ને મળતાં સુધી અને ખીજી તરફ કફ ને મળતાં સુધી અડ ને (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે, વડેઅક તથા બડફક



(૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાં થશે. અને તેઓ એકબીજી (બક) પાયા ઉપર અને એકબીજી (ફ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે તેથી (૩૫ પ્રતિ. પ્ર.) તેઓ બરાબર છે; અને બઅક ત્રિકોણ વડેઅક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાં અને બડક ત્રિકોણ બડફક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાં (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્થ છે. માટે તે બંને અર્થો (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, બઅક તથા બડક ત્રિકોણો બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. આ પ્રતિજ્ઞામાં માત્ર બેજ ત્રિકોણો બરાબર કરી બતાવ્યા છે. પણ, બે કરતાં વધારે ત્રિકોણો આપ્યા હોય તો, તેઓ પણ બરાબર છે એમ સિદ્ધ થાય.

પ્રતિજ્ઞા ૩૮ મી પ્રમેય.

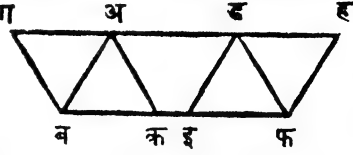
બરાબર (બક તથા ફ) પાયા ઉપરના અને એકબીજી (બક તથા

* ક્ષેત્રફળમાં બરાબર, પણ એકરૂપ કહેવાય નહિ. માટે, છવીશમી પ્રતિજ્ઞા નીચેની ટિકામાં આ પ્રતિજ્ઞા આવે નહિ.

અડ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના (વચક* તથા ફક*) ત્રિકોણો બરાબર* છે.

વ બિંદુની પાર અક ને સમાંતર
વગ લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો.

અને ફ બિંદુની પાર ફક ને સમાંતર



(૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) ફક દોરો. અડ લીટી વગ ને મળતાં સુધી અને બીજી તરફ ફક ને મળતાં સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે, ગવકઅ તથા ફફફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખો થશે. અને તેઓ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. હવે, વચક ત્રિકોણ ગવકઅ ચોખ્ખું અને ફફફ ત્રિકોણ ફફફ ચોખ્ખું (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અર્થ છે. તેથી, (૭ પ્રત્ય. પ્ર.) તે બંને અર્ધો બરાબર છે. એટલે, વચક ત્રિકોણ ફક ત્રિકોણની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

૧. બરાબર પાયાઓ એકજ લીટીમાં મૂક્યા છે એવું ઉપન્યાસમાં બાંધેલું છે.

પ્રતિજ્ઞા ૩૯ મી પ્રમેય.

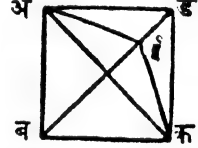
એકજ (વચ) પાયા ઉપરના અને તેની એકજ તરફના (વચક તથા વચક) બરાબર ત્રિકોણો એકજ (વચ તથા અડ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે.

અ તથા ક ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વચ ને સમાંતર અડ છે. કમક, ને એ બે લીટીઓ સમાંતર ન હોય તો, વચ ને અ

સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ધ દોરો.

અને ફક (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. વચ તથા અર્ધ લીટીઓ

સમાંતર છે. તેથી, વચક તથા ફફ ત્રિકોણો (૩૭



પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. અને વચક ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) વચક ત્રિકોણની

બરાબર છે. માટે, ફફ તથા વચક ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા.

પણ, ફફ ત્રિકોણનો વચક ત્રિકોણ એક ભાગ છે. માટે, ભાગ એ

આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, અર્ધ લીટી

વચ ને સમાંતર નથી. અને એજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, અડ

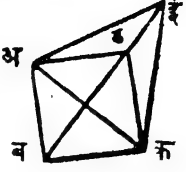
વગર બીજી કોઈપણ લીટી વચ ને સમાંતર નથી. માટે, અડ એજ વચ

ને સમાંતર છે.

* માત્ર એજ ત્રિકોણ સમજવાના નથી. વધારે હોય તો પણ એ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. * સાડત્રીશમી પ્રતિજ્ઞા તળેની નોટ જુઓ.

— નોટ નોટ નોટ પાસ છે.

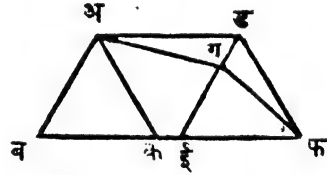
(બીજી રીતે) કદાચ, અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) વક ને સમાંતર દોરેલી અર્ધ લીટી અઢ લીટીથી બાંધે પડે તો, વક ને ર્ફ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને ર્ફ (૧ સ્વી. પ્ર.) અ સાંધો. (પછી ઉપર પહેલી રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ થશે.)



પ્રતિજ્ઞા ૪૦ મી પ્રમેય.

બરાબર (વક તથા ર્ફ) પાયા ઉપરના અને એકબીજા તરફના (વઅક) તથા (ર્ફફ) બરાબર ત્રિકોણો એકબીજા (વક તથા અઢ) સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે.*

અ તથા ઢ ને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. એટલે, વક ને સમાંતર અઢ થશે. કમક, જો અઢ લીટી સમાંતર ન હોય તો, વક ને સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) અગ દોરો. અને ગફ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



અગ સીધી લીટી (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) વક ને સમાંતર છે, અને વક તથા ર્ફ બરાબર છે; તેથી, વઅક અને ર્ફગ ત્રિકોણો (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ ર્ફફ (ઉપન્યાસ પ્ર.) વઅક ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, ર્ફગ તથા ર્ફફ ત્રિકોણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થયા. પણ ર્ફગ ત્રિકોણ ર્ફફ ત્રિકોણનો ભાગ છે એટલે, ભાગ એ આખાની બરાબર થાય એ (૯ પ્રત્ય. પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે, અગ લીટી વક ને સમાંતર નથી. અને એ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, અઢ વગર બીજી કોઈપણ લીટી વક ની સાથે સમાંતર નથી. એટલે, અઢ લીટીજ વક લીટીની સાથે સમાંતર છે એ સિદ્ધ*.

(બીજી રીતે) કદાચ, વક ને સમાંતર અ બિંદુથી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.)

* આડત્રીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે. * ઉલટી સિદ્ધતાથી જોઈએ.

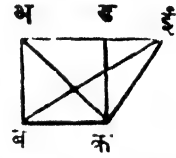
દોરેલી મગ લીટી મઢ લીટીથી
જાયે પડે તો, રૂંઢ ને ગ સુધી
(૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને ગફ
(૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો. ઉપર પહેલી
રીતમાં કહેલી બધી સિદ્ધતા લાગુ પડશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૧ મી પ્રમેય.

જો, એક (વઢ) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનો અને એક (વર્ડક) ત્રિકોણનો પાયો એકજ હોય, અને તેઓ એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે હોય તો, સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા ત્રિકોણથી બમણો થશે.

અ તથા ક બિંદુઓ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.

હવે, વઢક તથા વર્ડક ત્રિકોણો એકજ વક પાયા ઉપર અને વક તથા અર્ધ એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે (૩૭ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા તેના અર્ધ કર્યુંથી (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગ્યો છે એટલે વઢક ત્રિકોણથી વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા બમણો છે. માટે વઢક ત્રિકોણની બરાબરના વર્ડક ત્રિકોણથી પણ વઢ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા બમણો છે એ સિદ્ધ.



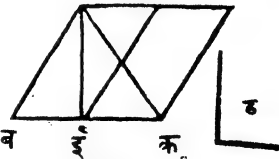
પ્રતિજ્ઞા ૪૨ મી કૃત્ય.

એક આપેલા (વઢક) ત્રિકોણની બરાબર અને જોનો એક ખૂણો એક આપેલા (ઈ) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા કરવાનું.

સાધન.

અ બિંદુની પાર વક ને સમાંતર અફ સીધી લીટી (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને ત્રિકોણના વક પાયાને રૂં આગળ

(૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દુભાગો. અને રૂં સીધી લીટી સાથે રૂં બિંદુ આગળ, કહેલા ઢ ખૂણાની બરાબર (૨૩ પ્રતિ. પ્ર.) રૂંફ ખૂણો કરો. અફ લીટીને ગ આગળ મળે લાંસુધી ક ની પાર રૂંફ ને સમાંતર



(૧૦ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, કરવાનો સમાંતર બાજુ ચોખ્ખા કર્યું છે.

સિદ્ધતા.

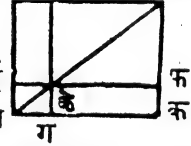
કમકે, ર્ક (આદ્ય. રચ. પ્ર.) અગ ને સમાંતર છે. અને ર્ક પશુ કગ ની સાથે સમાંતર છે. તેથી, કફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ છે.

વળી, વઅર્ક અને ર્ક બંને ત્રિકોણો, વર્ક અને ર્ક બરાબર પાયા ઉપર અને એક જ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચે છે. માટે, (૩૮ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. એટલે, આખો વઅર્ક ત્રિકોણ ર્ક ત્રિકોણથી બમણો છે. અને ર્ક ત્રિકોણથી કફ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ પશુ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. માટે, વઅર્ક ત્રિકોણ તથા કફ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ બંને (૬ પ્રચ. પ્ર.) બરાબર છે અને તેનો કર્ક બૂણો આપેલા ઢ બૂણાની બરાબર છે. તેથી, કરવાનો સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ કફ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૩ મી પ્રમેય.

એક (અર્ક) સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુમાં ઠર્ક લીટીની આસપાસની (ઈગ તથા હફ) સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુની (અર્ક તથા કર્ક) પુરવણીઓ બરાબર છે.

વઢ ઠર્ક લીટી દોરો. અને તે માંહેલા કોઈપણ કે બિંદુની પાર વર્ક ને સમાંતર ર્ક (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને તેજ બિંદુથી અવ ને સમાંતર ગઢ પશુ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો ત્યારે, ઠર્ક લીટીની અ હ ઢ આસપાસના ઈગ તથા હફ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ છે. અને અર્ક તથા કર્ક તેની પુરવણીઓ છે.



અર્ક સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુના તેની વઢ ઠર્ક લીટીથી થયેલા વઅર્ક તથા વર્ક ત્રિકોણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. વળી, હફ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુની કેઢ ઠર્ક લીટીથી થયેલા કેહઢ તથા કેફઢ ત્રિકોણો પશુ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે; અને તેજ કારણથી ઈગ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુની વર્ક ઠર્ક લીટીથી થયેલા વર્કે તથા વર્ગકે ત્રિકોણો બરાબર છે. તેથી કેહઢ તથા વર્કે ત્રિકોણોનો સર્વાળો (૨ પ્રચ. પ્ર.) કેફઢ તથા વર્ગકે ત્રિકોણોના સર્વાળો બરાબર છે.

આ બરાબર કરેલા સર્વાળો (કેહઢ + વર્કે ત્રિકોણો તથા કેફઢ + વર્ગકે ત્રિકોણો) ને વઅર્ક તથા વર્ક બરાબર ત્રિકોણોનાં

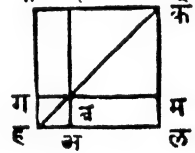
એટલે, બાકી અંકે તથા કંકે પૂરવણીઓ રહેશે તે (૩ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર રહેશે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૪ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અ) સીધી લીટી ઉપર, એક આપેલા (ક) ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો આપેલા એક (ઢ) ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાબુચોખૂણું કરવાનું.

સાધન.

આપેલા ક ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો બ ખૂણો આપેલા ઢ ખૂણાની બરાબર થાય અને વડે બીટી અંક ની સાથે એકજ સીધી લીટીમાં થાય એવો વડે ફગ સમાંતર બાબુ ચોખૂણું (૪૨ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. અને ફગ (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. અને અ ની પાર વગ ને સમાંતર ફ ઈ અહ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને હવ (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



હવે, હલ તથા ફકે સમાંતર

છે. તેથી લહફ તથા હફકે ખૂણાઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. અને તેથી વહફ તથા હફકે ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો છે. એ માટે, હવ તથા ફઈ ને વધારીએ તો, તેઓ (૧૨ પ્રત્ય. પ્ર.) મળી નવી બેઠાએ. ધારો કે, કે આગળ તેઓ મળે છે. હવે, કે બિંદુથી હફ ને સમાંતર કોલ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને અહ ને લ બિંદુ સુધી તથા વગ ને મ બિંદુ સુધી (૨ સ્વી. પ્ર.) વધારો. એટલે અમ (૨૯ અ વ્યા. પ્ર.) સમાંતર બાબુ ચોખૂણું થશે. અને તે, જે સમાંતર બાબુ ચોખૂણું કરવાનો હતો તેજ છે.

સિદ્ધતા.

ક્રમકે, ફલ સમાંતર બાબુ ચોખૂણામાં હકે કર્ણ લીટીની આસપાસના સમાંતર બાબુ ચોખૂણાની અમ તથા ગઈ પૂરવણીઓ (૪૩ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. પણ ગઈ (આકૃ. ૨ચ.) ક ત્રિકોણની બરાબર છે. માટે, અમ ચોખૂણું પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) ક ત્રિકોણની બરાબર છે. તેમજ ઈવગ ખૂણો (૧૫ પ્રતિ. પ્ર.) અવમ ખૂણાની બરાબર છે. અને ઈવગ (આકૃ. ૨ચ. પ્ર.) ઢ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, ઢ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) અવમ ખૂણાની બરાબર છે. એટલે,

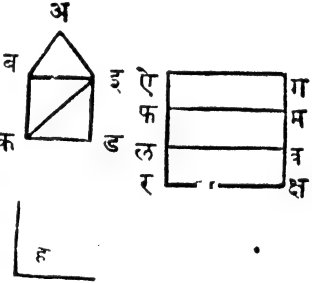
કરવાનો સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ અમ છે. તે આપેલી અવલીટી ઉપર કીધેલો છે; આપેલા ક ત્રિકોણની બરાબર છે; અને જેનો અવમ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૪૫ મી કૃત્ય.

એક આપેલી (અવકંઠઈ) સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા હ ખૂણાની બરાબર થાય એવો એક સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ કરવાનું.

સાધન.

આપેલી સીધી લીટી આકૃતિના ત્રિકોણો કરો, અને તેટલા સાડે બંદે તથા કંઈ (૧ સ્તી. પ્ર.) સાંધો. બંદે ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો એક એ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક ફગ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ (૪૪ વ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. તેની એક ફમ બાબુ ઉપર કંઈ ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો ફ ખૂણો કહેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક લમ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો અને તેની લંબ બાબુ



ઉપર કંઈ ત્રિકોણની બરાબર અને જેનો લ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો રવ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ (૪૪ પ્રતિ. પ્ર.) કરો. (એ પ્રમાણે આકૃતિના જેટલા ત્રિકોણો થયેલા છે, તેમાંના દરેકની બરાબર અને આપેલા ખૂણાની બરાબર ખૂણો રાખીને ૪૪ પ્રતિ. પ્ર. સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ કરવા.) એટલે, આપેલી સીધી લીટી આકૃતિની બરાબર અને જેનો એક હ ખૂણો આપેલા હ ખૂણાની બરાબર એવો એક રગ સમાંતર બાબુ ચોખ્ખુ થશે.

સિદ્ધતા.

એ ખૂણો (આકૃ. રચ. પ્ર.) હ ખૂણાની બરાબર છે. અને મફલ ખૂણો પણ આકૃ. રચ. પ્ર. હ ખૂણાની બરાબર છે. તેથી, એ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) મફલ ખૂણાની બરાબર છે. એ બંનેમાં મફલ ખૂણો મેળવે તો, એ તથા મફલે ખૂણાઓનો સર્વાંગો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) મફલ તથા મફલે ખૂણાના સર્વાંગો બરાબર થાય. પણ એમ તથા ફમ સમાંતર લીટીઓને

૧ તથા મફદે ખૂણાઓનો સર્વાંગો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, મફલ તથા મફદે ખૂણાઓનો સર્વાંગો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે.

હવે, ફેક તથા ફલ લીટીઓ કમ લીટીના ક બિંદુ આગળ વિરૂદ્ધ બાજુએ મળીને મફલ તથા મફદે ખૂણાઓ કરે છે અને તે બંને ખૂણાનો સર્વાંગો બે કાટખૂણા બરાબર છે તો, ફેક તથા ફલ મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક અખંડ સીધી લીટી થાય છે. તેજ પ્રમાણે એવું સિદ્ધ થઈ શકશે કે, ફલ તથા જર મળીને એક સીધી લીટી થાય છે. એટલે ફેર એક સીધી લીટી છે. વળી, ફેક લીટી મળની સાથે સમાંતર છે. તેથી ફેકમ ખૂણો (૨૮ પ્રતિ. પ્ર.) વ્યુત્ક્રમ કમવ ખૂણાની બરાબર છે. તે બંનેમાં કમગ ખૂણો મેળવે એટલે, ફેકમ તથા કમગ ખૂણાનો સર્વાંગો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) કમવ તથા કમગ ખૂણાની બરાબર છે. પણ, ફેકમ તથા કમગ ખૂણાનો સર્વાંગો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, કમવ તથા કમગ ખૂણાઓનો સર્વાંગો પણ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, કમ તથા મવ મળીને (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) એક સીધી લીટી થાય છે. એજ પ્રમાણે મવ તથા વજ ને માટે સિદ્ધ થઈ શકે છે. એટલે ગદ્ય સીધી લીટી છે. અને તે ફેર ની સાથે સમાંતર પણ છે; રજ તથા કમ એકજ જ લીટીની સાથે સમાંતર છે. તેથી રજ લીટી કમની સાથે (૩૦ પ્રતિ. પ્ર.) સમાંતર છે. અને કમ ની સાથે ફેગ તથા રજ સમાંતર છે તેથી, રગ (૨૯ મ વ્યા. પ્ર.) એક સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું છે.

કમ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું થઈ ત્રિકોણની અને જમ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું થઈ ત્રિકોણની અને રવ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું થઈ ત્રિકોણની બરાબર છે. એ બધા સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનો સર્વાંગો રગ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું છે અને એ બધાં ત્રિકોણોનો સર્વાંગો અઘકઢઈ આકૃતિ છે માટે આખો રગ સમાંતર બાજુ ચોખ્ખું (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) આપેલી ઘઘકઢઈ આકૃતિની બરાબર છે. અને તેનો જે ખૂણો આપેલા ૬ ખૂણાની બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૬ મી કૃત્ય*.

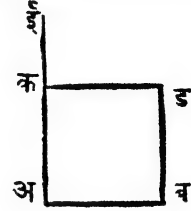
એક આપેલી (અવ) સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવાનું. ૦

*આ છેલ્લી કૃત્ય પ્રતિજ્ઞા છે. આ સ્કંધમાં ૧, ૨, ૩, ૯, ૧૦, ૧૧,

૦ ૪૪, ૪૫ અને ૪૬ એ ચૌદ કૃત્ય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

સાધન.

આપેલી અવ લીટીના અ બિંદુથી અવ લીટી ઉપર (૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) અર્ધ લંબ દોરો અને તેમાંથી અવ ની બરાબર અંક (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. ક ની પાર અવ ને સમાંતર કઢ અને વ ની પાર અંક ને સમાંતર વઢ (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. એટલે, કરવાનો ચોરસ અંક છે.



સિદ્ધતા.

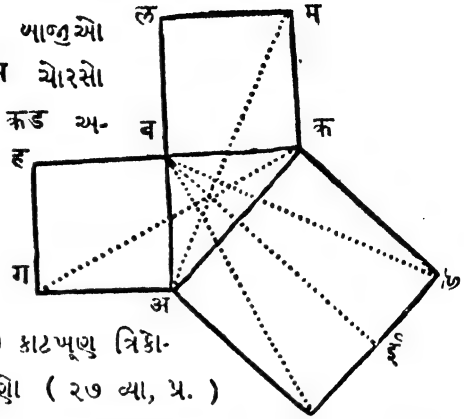
કેમકે, અંક ચોખ્ખીની બંને તરફની સામસામેની બાજુઓ (આકૃ. ૨૪ પ્ર.) સમાંતર છે. માટે તે (૨૯ અ. બા. પ્ર.) સમાંતર બાજુ ચોખ્ખી છે. તેથી તેની અવ તથા કઢ સામ સામેની બાજુઓ (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર અને તેજ પ્રમાણે અંક તથા વઢ બાજુઓ બરાબર અને અવની બરાબર અંક રાખેલી છે. તેથી, અવ, કઢ, અંક અને વઢ એ ચારે બાજુઓ (૧ પ્રલ. પ્ર.) ચરસપરસ બરાબર છે. તેથી, અંક (૩૦ બા. પ્ર.) સમાંતર સમ-બાજુ ચોખ્ખી અથવા લૉએજ છે.

અવ સીધી લીટી ઉપર અંક લંબ છે. તેથી, અંક ખૂણો (૧૦ બા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને અંક તથા કઢ અંક ખૂણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) બરાબર છે. તેથી, કઢ અંક ખૂણો પણ કાટખૂણો હવે, કઢ તથા અવ સમાંતર લીટીઓને અંક લીટી છેદે છે. તેથી, અંક તથા અંક અંક ખૂણોઓનો સર્વાળો (૨૯ પ્રતિ. પ્ર.) એ કાટખૂણો બરાબર છે. પણ અંક ખૂણો કાટખૂણો છે તો બાકીનો અંક અંક ખૂણો પણ કાટખૂણો અને તેની સામેનો અંક અંક ખૂણો (૩૪ પ્રતિ. પ્ર.) અંક અંક ખૂણોની બરાબર છે. માટે, તે પણ કાટખૂણો એટલે, તે ચારે કાટખૂણો (૧૧ પ્રલ. પ્ર.) બરાબર. માટે, અંક લૉએજ (૩૧ બા. પ્ર.) ચોરસ છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૭ મી પ્રમેય.

એક (અવ) કાટખૂણો ત્રિકોણમાં (અંક) કણનો વર્ગ (અવ તથા અંક) બાજુઓનો વર્ગોના સર્વાળો બરાબર છે.

અવ, અક તથા વક બાળુઓ ઉપર અહ, અઢ તથા વમ ચોરસો (૪૬ પ્રતિ પ્ર.) કરો. અને કંઢ અ-થવા અફ લીટીને સમાંતર વ બિંદુથી વર્ડે (૩૧ પ્રતિ. પ્ર.) દોરો. અને વફ તથા કગ (૧સ્વી. પ્ર.) સાંધો.



અવક ત્રિકોણ (ઉપન્યાસ પ્ર.) કાટખૂણુ ત્રિકોણ છે. તેથી, તેનો અવક ખૂણો (૨૭ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને અવહ ખૂણો પણ અહ ચોરસનો ફ ખૂણો છે. માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી, અવક તથા અવહ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા છે.

હવે, વક તથા વહ લીટીઓ અવ લીટીના વ બિંદુ આગળ મળે છે. અને અવક તથા અવહ ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે. માટે, હક (૧૪ પ્રતિ. પ્ર.) અખંડ સીધી લીટી થશે. તેજ પ્રમાણે વઅ તથા વલ મળીને અલ અખંડ સીધી લીટી થશે.

હવે, અગક તથા અવક એ બે ત્રિકોણો લઈએ તો, તેની અગ તથા અવ બાળુઓ અહ ચોરસની બાળુઓ છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ અક તથા અફ બાળુઓ પણ અઢ ચોરસની બાળુઓ છે તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને વઅગ ખૂણો અહ ચોરસનો ખૂણો છે માટે (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. અને કઅફ ખૂણો પણ અઢ ચોરસનો ખૂણો છે માટે તે પણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી એ બંને ખૂણા (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે. આ બંને બરાબર ખૂણાઓમાં વઅક ખૂણો મેળવીએ તો, આખો કઅગ ખૂણો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) વઅફ ખૂણાની બરાબર થશે. એટલે, અગક તથા અવક ત્રિકોણોની બંને બાળુઓ તથા તેથી થયેલા અંતરખૂણા બરાબર થયા, તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો એક રૂપ છે.

પણ હક લીટી ગઅ સાથે સમાંતર છે તેથી ગઅ એકજ પાયા ઉપરના અને હક એકજ સમાંતર લીટી વચ્ચેના અગક ત્રિકોણથી અહ સમાંતર બાળુ ચોખૂણુ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બમણો છે. અને તેજ પ્રમાણે અફ

એકજ પાયા ઉપરના અને વર્ડ સમાંતર લીટી વચ્ચેના અવકાશ ત્રિકોણથી અર્ધ સમાંતરબાજુચોખૂણુ બનશે છે. એટલે, અહ તથા અર્ધ સમાંતર બાજુચોખૂણુ (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર છે.

વળી, અમ તથા વડ બિંદુઓને (૧ સ્વી. પ્ર.) સાંધવાથી થયેલા મઅક તથા ઢવક ત્રિકોણો બરાબર છે. કેમકે, તે બંને ત્રિકોણોની મક તથા વક બાજુઓ એકજ વમ ચોરસની બાજુઓ છે તેથી (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. તેમજ કઅ તથા કડ પણ એકજ અડ ચોરસની બાજુઓ છે તેથી તેઓપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) બરાબર છે. અને મકવ ખૂણો વમ ચોરસનો ખૂણો છે માટે, (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેમજ અકડ ખૂણો પણ અડ ચોરસનો ખૂણો છે માટે, તેપણ (૩૧ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણો છે. તેથી (૧૧ પ્રત્ય. પ્ર.) એ બંને ખૂણા બરાબર. તે દરેકમાં વકઅ ખૂણો પ્રથક પ્રથક મેળવીએ તો, આખા મકઅ તથા વકડ ખૂણા (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) બરાબર થશે. એટલે મઅક તથા ઢવક ત્રિકોણોમાંથી એકની બે બાજુઓ અને અંતરખૂણો અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને અંતરખૂણાની બરાબર તેથી (૪ પ્રતિ. પ્ર.) બંને ત્રિકોણો બરાબર છે.

મક એકજ પાયા ઉપર અને મક તથા અલ એકજ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના મઅક ત્રિકોણ તથા કલ ચોરસ છે તેથી મઅક ત્રિકોણથી કલ ચોરસ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બનશે છે તેમજ કડ એકજ પાયા ઉપર અને વર્ડ એકજ સમાંતરલીટીઓની વચ્ચે ઢવક ત્રિકોણ તથા કર્ડ સમાંતરબાજુચોખૂણુ છે તેથી, ઢવક ત્રિકોણથી કર્ડ ચોખૂણુ (૪૧ પ્રતિ. પ્ર.) બનશે છે.

અહ ચોરસ (ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્રમાણે) અર્ધ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ બરાબર અને કલ ચોરસ કર્ડ સમાંતર બાજુ ચોખૂણુ બરાબર તેથી અહ તથા કલ ચોરસોના સર્વાંગો (૨ પ્રત્ય. પ્ર.) અર્ધ તથા કર્ડ સમાંતર બાજુ ચોખૂણોના સર્વાંગો બરાબર છે. અને અર્ધ તથા કર્ડ ચોખૂણો મળીને અડ ચોરસ થયેલા છે એટલે, અહ તથા કલ ચોરસોના સર્વાંગો બરાબર અડ ચોરસ છે. અહ તથા કલ ચોરસો આપેલા કાટખૂણુ ત્રિકોણની અવ તથા વક બાજુઓ ઉપર કીધેલા છે. અને અડ ચોરસ અક કર્ડ ઉપર કીધેલા છે. ચોરસને ભૂમિતિવિદ્યામાં વર્ગ કહેછે. માટે, અવક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં

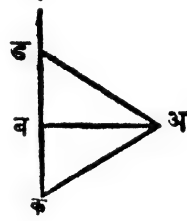
અક કર્ણ લીટીનો વર્ગ અવ તથા વક બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે એ સિદ્ધ.

પ્રતિજ્ઞા ૪૮ મી પ્રમેય.*

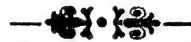
જો, એક (અવક) ત્રિકોણની (અક) એક બાજુનો વર્ગ બીજી (અવ તથા વક) બે બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર હોય તો, તે બાજુની સામેનો (અવક) ખૂણો કાટખૂણો થશે.*

વ બિંદુથી તેની એક અવ બાજુ ઉપર (૧૧ પ્રતિ. પ્ર.) વડે લંબ દોરો; અને વક ની બરાબર વડ (૩ પ્રતિ. પ્ર.) કાપો. અને અડ (૧ સ્ત્રી. પ્ર.) સાંધો.

અવડ ત્રિકોણનો વ ખૂણો કાટખૂણો છે. માટે, તે (૨૭ વ્યા. પ્ર.) કાટખૂણ ત્રિકોણ છે. તેથી, અડ કર્ણ લીટીનો વર્ગ (૪૭ પ્રતિ. પ્ર.) અવ તથા વડ બાજુઓના વર્ગોના સર્વાળા બરાબર છે. અને વડ (આકૃ. ૨૫. પ્ર.) વક ની બરાબર



રાખેલી છે. તેથી, અડ નો વર્ગ અવ તથા વક ના વર્ગના સર્વાળાની બરાબર છે; પણ અવ તથા વક ના વર્ગોનો સર્વાળો (ઉપન્યાસ પ્ર.) અક ના વર્ગની બરાબર છે. માટે, અડ તથા અક ના વર્ગો બરાબર છે. તેથી, અડ તથા અક લીટીઓ જોડે પણ બરાબર છે; હવે, અને ત્રિકોણોમાં વડ તથા વક બાજુઓ બરાબર છે અને અવ બાજુ સાધારણ છે. અને અડ તથા અક ઉપર બરાબર કરી તેથી, અવક તથા અવડ ત્રિકોણો અસ્પર્શ સમબાજુ છે; માટે, (૮ પ્રતિ. પ્ર.) અસ્પર્શ સમખૂણુ પણ છે. અને તેથી અવક ખૂણો અવડ ખૂણાની બરાબર છે; પણ અવડ ખૂણો કાટખૂણો છે. તેથી અવક ખૂણો પણ (૧ પ્રતિ. પ્ર.) કાટખૂણો છે એ સિદ્ધ.



ઉપયોગી અનુમાનો.

પ્રતિજ્ઞા ૫ મી.

અનુમાન ૧ હું—સમબાજુ ત્રિકોણ સમખૂણુ છે. કેમકે, હરેક બે બરાબર બાજુઓની સામેના ખૂણા બરાબર છે.

* આ છેલ્લી પ્રમેય પ્રતિજ્ઞા છે. આરંધમાં ૪, ૫, ૬, ૭, ૮, ૯, ૧૦, ૧૧, ૧૨, ૧૩, ૧૪, ૧૫, ૧૬, ૧૭, ૧૮, ૧૯, ૨૦, ૨૧, ૨૨, ૨૩, ૨૪, ૨૫, ૨૬, ૨૭, ૨૮, ૨૯, ૩૦, ૩૧, ૩૨, ૩૩, ૩૪, ૩૫, ૩૬, ૩૭, ૩૮, ૩૯, ૪૦, ૪૧, ૪૨, ૪૩ અને ૪૪ એ યોગીશ પ્રમેય પ્રતિજ્ઞાઓ છે.

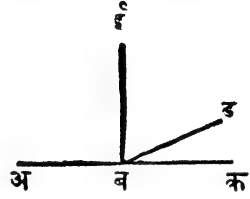
* સૂક્ષ્મતાળીશમીનો ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રતિજ્ઞા ૬ ઠી.

અનુમાન ૧ હું—સમખૂણુ ત્રિકોણુ સમખાળુ ત્રિકોણુ છે. કેમકે, બે બરાબર ખૂણાઓની સામેની બાજુઓ બરાબર છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૧ મી.

અનુમાન ૧ હું—બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી. કેમકે, બે હોઈ શકે તો ધારો કે અવક તથા અવડ બે સીધી લીટીઓમાં બંનેને અવ.ખંડ સામાન્ય છે. વ બિંદુથી અવ ઉપર વેઈ લંબ (આ.પ્રતિ.પ્ર.) દોરો. અવક સીધી લીટી છે તેથી (૧૦વ્યા.પ્ર.) કવર્ડ ખૂણો ર્વઅ ખૂણાની બરાબર છે; તેજ પ્રમાણે અવડ



સીધી લીટી છે, તેથી ડવર્ડ ખૂણો ર્વઅ ખૂણાની બરાબર છે; માટે ર્વઅ ખૂણો (૧ પ્રત્ય. પ્ર.) કવર્ડ ખૂણાની બરાબર છે પણ એ (૯પ્રત્ય.પ્ર.) અસંભવિત છે. માટે બે સીધી લીટીઓને સામાન્ય ખંડ હોઈ શકતો નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૧૩ મી.

અનુમાન ૧ હું—એકજ સીધી લીટી ઉપર એકજ બિંદુ આગળ કેટલીએક સીધી લીટીઓ પડીને તેની સાથે જે ખૂણાઓ કરે, તે સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૨ જી—જે બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદીને ખૂણાઓ કરે તો આ સઘળા ખૂણાઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર છે.

અનુમાન ૩ જી—કેટલીએક સીધી લીટીઓ એકજ બિંદુથી કેંદ્રવિચળ થાય તો તેથી આસપાસના અવકાશમાં જે ખૂણાઓ થાય તેઓનો સર્વાળો ચાર કાટખૂણા બરાબર થશે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૮ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ બીજી બાજુ કરતાં મોટી, તેની બરાબર અથવા તેનાથી નાની હોય તે પ્રમાણમાં પહેલી બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (પાંચમી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ)

અનુમાન ૨ બીજી—વિષમ બાજુ ત્રિકોણના સઘળા ખૂણા વિષમ છે.

પ્રતિજ્ઞા ૧૯ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક ત્રિકોણની એક બાજુ સામેનો ખૂણો બીજી બાજુ સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર, અથવા નાનો હોય તે

ખીજી બાજુ કરતાં પહેલી બાજુ મોટી બરાબર અથવા નાની થશે. (૧૭ પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૫ મી.

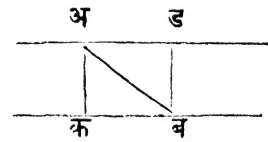
અનુમાન ૧ હું—એ ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે ખીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય અને તેઓની વચ્ચેનો અંતરખૂણો ખીજના અંતરખૂણા કરતાં મોટો, બરાબર અથવા નાનો હોય તે પ્રમાણમાં પહેલા ત્રિકોણનો પાયા ખીજ ત્રિકોણના પાયાથી મોટો, બરાબર અથવા નાનો થશે. (ચોથી પ્રતિજ્ઞાની પણ મદદ જોઈએ.)

પ્રતિજ્ઞા ૨૬ મી.

અનુમાન ૧ હું—એ સમાંતર લીટીઓ માંહેલી એક અથવા ઉપર જો કોઈ રેખા લીટી લંબ હોય તો ખીજ કડ ઉપર પણ તે રેખા લીટી લંબ થશે; કેમકે



વ્યુત્ક્રમ ખૂણા બરાબર છે. અનુમાન ૨ જું—એ સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેના સઘળા લંબો બરાબર છે. કેમકે, અથવા દોરો વચક તથા અવક ખૂણાઓ વ્યુત્ક્રમ છે, તેથી તેઓ બરાબર છે. અને વચક તથા અવક તેજ કારણથી બરાબર છે અથવા બાજુ અને ત્રિકોણોમાં સામાન્ય છે તેથી (૨ પ્રતિ.પ્ર.) અક તથા વક બાજુઓ બરાબર છે.

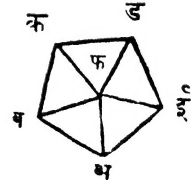


પ્રતિજ્ઞા ૩૦ મી.

અનુમાન ૧ હું—એક જ લીટી સાથેની બે સમાંતર લીટીઓ એક જ બિંદુની પાર જઈ શકતી નથી.

પ્રતિજ્ઞા ૩૨ મી.

અનુમાન ૧ હું—કોઈ પણ અવકાશ સીધી લીટી આકૃતિના સઘળા માંહેના ખૂણાઓની સાથે ચાર કાટખૂણા મેળવીએ તો, આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર તેઓ થશે.



એ આકૃતિની માંહે કોઈ પણ ક બિંદુ, અને કઅ, કવ, કક, કડ તથા કઈ (૧૨વી.પ્ર.) સાંધો. એટલે, આકૃતિઓમાં જેટલી બાજુઓ છે તેટલા ત્રિકોણ બન્યા. અને તેથી તેના સઘળા ખૂણાઓનો સરવાળો (૩૨ પ્રતિ.પ્ર.) આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર છે. પણ ક બિંદુ આ-ખૂણાઓ (૧૩ પ્રતિ. ના ૩ અનુ. પ્ર.) ચાર કાટખૂણા બરાબર છે;

જાહેર ખખર.

વિનતિ કે, અમે ગયા ફેબ્રુઆરીના શાળાપત્રમાં જે પુસ્તકો તૈયાર વગેરેની જાહેર ખખર મૂકી હતી; તેમાંથી એક પુસ્તક તૈયાર થયું તે અને “દેશીનામાનો સંક્ષેપ” એ નામનું બીજું પુસ્તક પણ મળકુર હેરખખર અનુસાર પ્રગટ કરવાના વિચારમાં છીએ. આ પુસ્તક શાળા-યાત્રી તેથી ઘણી ગરીબ સ્થિતિના વિદ્યાર્થીઓ પણ તેનો લાભ લેઈ શકે માટે, ક્રીમત બહુ જૂનું રાખેલી છે. જેની આ પુસ્તક ખરીદવાની ઇચ્છા હોય તેણે નીચે લખેલે ઠેકાણે ક્રીમત મોકલી અગર વેલ્યુએએબલ મંગાવવા તગનીજ કરાવની.

શબ્દકોટ— { કર્તા પાસે
દર. બેચર મેઘજી બુકસેલર પરામાં.
બાઈ નાનાલાલ નાગરદાસ સ્ટેશન સ્કૂલના પહેલા આસિ-
સ્ટન્ટ માસ્ટર.

બુંબાઈ—બુકસેલર દામોદર હશ્વરદાસ લાઈબ્રેરીવાળા.

વડોદરા—રા. લીલાધર પ્રભાશંકર શીમેલ ટ્રેનિંગ કોલેજ.

ભાવનગર—રા. રા. તારાચંદ ત્રીકમદાસ ખાનગી કેળવણી દફતરે શિરસ્તેદાર.

વઢવાણ સ્ટેશન—વકીલ, તલકશી હીમજી.

નગર—ધુ દુર્લભદાસ શામજી ધુ ફળીઆમાં.

—ગુલાબચંદ તારાચંદ બાગલ પોળ.

વરનાં ગ્રાહકોએ ટપાલખર્ચનો અર્થો આનો વિશેષ મોકલવો.

આજીવન
ફિલિંગ આ-
ખખર છે.

